

Børne- og Undervisningsudvalget
Christiansborg

Styrelsen for Undervisning og
Kvalitet

Frederiksholms Kanal 26
1220 København K
Tlf. 3392 5000
Fax 3392 5567
E-mail stuk@stukuvn.dk
www.stukuvn.dk
CVR nr. 29634750

Svar på spørgsmål 10 (Alm. del):

I brev af 21. august 2015 har udvalget efter ønske fra Merete Riisager (LA) stillet mig følgende spørgsmål:

11 SEP. 2015

Spørgsmål:

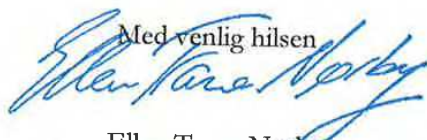
"Vil ministeren fremsende eksemplarer af de seneste tre års studenterek-samensopgaver i skriftlig matematik (A-, B- og C-niveau)?"

Svar:

I tabel 1 er vist en oversigt over opgavesæt på A- og B-niveau ved stu-dentereksamen (stx, det almene gymnasium) i skriftlig matematik fra skoleårene 2012-2013, 2013-2014 og 2014-2015.

Opgavesættene er desuden vedlagt.

I matematik på C-niveau i stx afholdes alene mundtlig prøve.

Med venlig hilsen

Ellen Trane Nørby

Bilag 1

Tabel 1. Opgavesæt fra studentereksamen (stx) i skriftlig matematik fra skoleårene 2012-2013, 2013-2014 og 2014-2015

Dato	Prøve
2012-2013	
7. december 2012	Matematik A
7. december 2012	Matematik B
7. december 2012	gl-Matematik B*
6. maj 2013	Matematik A, netadgang, bilagsmateriale**
24. maj 2013	Matematik A
24. maj 2013	gl-Matematik A
24. maj 2013	Matematik A, netadgang**
24. maj 2013	Matematik B
24. maj 2013	gl-Matematik B
29. maj 2013	Matematik A
29. maj 2013	gl-Matematik A
29. maj 2013	Matematik A, netadgang
29. maj 2013	Matematik B
29. maj 2013	gl-Matematik B
14. august 2013	Matematik A
14. august 2013	gl-Matematik A
14. august 2013	Matematik A, netadgang
14. august 2013	Matematik B
14. august 2013	gl-Matematik B
2013-2014	
6. december 2013	Matematik A
6. december 2013	Matematik B
5. maj 2014	Matematik A, netadgang, bilagsmateriale
22. maj 2014	Matematik A
22. maj 2014	gl-Matematik A
22. maj 2014	Matematik A, netadgang
22. maj 2014	Matematik B
27. maj 2014	Matematik A
27. maj 2014	gl-Matematik A
27. maj 2014	Matematik A, netadgang
27. maj 2014	Matematik B
14. august 2014	Matematik A
14. august 2014	gl-Matematik A
14. august 2014	Matematik A, netadgang
14. august 2014	Matematik B
2014-2015	
5. december 2014	Matematik A
5. december 2014	Matematik B
5. maj 2015	Matematik A, netadgang bilagsmateriale
22. maj 2015	Matematik A
22. maj 2015	Matematik A, netadgang

22. maj 2015	Matematik B
28. maj 2015	Matematik A
28. maj 2015	Matematik A, <u>netadgang</u>
28. maj 2015	Matematik B
13. august 2015	Matematik A
13. august 2015	Matematik A, <u>netadgang</u>
13. august 2015	Matematik B

Note:

* Forkortelsen ”gl-Matematik” henviser til *gammel ordning*. De pågældende opgavesæt er stillet i henhold til tidligere bekendtgørelser, idet der i forbindelse med overgang til nye regler er eksaminander, der i en periode fortsat aflægger prøver efter tidligere regler.

** Forkortelsen ”netadgang” henviser til *digital eksamensopgave med adgang til internettet*, dvs. at det pågældende opgavesæt er stillet i henhold til læreplan for forsøg med netadgang ved skriftlig eksamen, matematik A, stx, september 2009.

MATEMATIK
B-NIVEAU

fredag 7. december 2012

Kl. 09.00 – 13.00

STX123-MAB-GL

Opgavesættet er delt i to dele.

Delprøven uden hjælpemidler består af opgave 1-6 med i alt 6 spørgsmål.
Delprøven med hjælpemidler består af opgave 7-13 med i alt 14 spørgsmål.

De 20 spørgsmål indgår med lige vægt i bedømmelsen.

Bedømmelsen af det skriftlige eksamenssæt

I bedømmelsen af besvarelsen af de enkelte spørgsmål og i helhedsindtrykket vil der blive lagt vægt på, om eksaminandens tankegang fremgår klart af besvarelsen. Dette vurderes blandt andet ud fra kravene beskrevet i de følgende fem kategorier:

1. TEKST

Besvarelsen skal indeholde en forbindende tekst fra start til slut, der giver en klar præsentation af, hvad den enkelte opgave og de enkelte delspørgsmål går ud på.

2. NOTATION OG LAYOUT

Der kræves en hensigtsmæssig opstilling af besvarelsen i overensstemmelse med god matematisk skik, herunder en redegørelse for den matematiske notation, der indføres og anvendes, og som ikke kan henføres til standardviden.

3. REDEGØRELSE OG DOKUMENTATION

Besvarelsen skal indeholde en redegørelse for den anvendte fremgangsmåde og dokumentation i form af et passende antal mellemregninger og/eller en matematisk forklaring på brugen af de forskellige faciliteter, som et værktøjsprogram tilbyder.

4. FIGURER

I besvarelsen skal der indgå en hensigtsmæssig brug af figurer og illustrationer, og der skal være en tydelig sammenhæng mellem tekst og figurer.

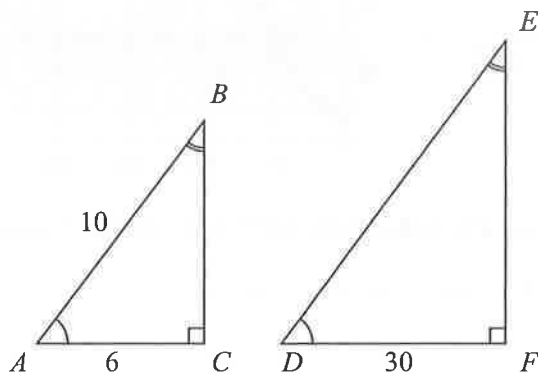
5. KONKLUSION

Besvarelsen skal indeholde en afrunding af de forskellige spørgsmål med præcise konklusioner, præsenteret i et klart sprog og/eller med brug af almindelig matematisk notation.

Delprøven uden hjælpemidler

Kl. 09.00 – 10.00

Opgave 1



Størrelsesforholdene er ikke korrekte

På figuren ses to retvinklede trekanter ABC og DEF , der er ensvinklede. Nogle af sidelængderne er angivet på figuren.

Bestem de resterende sidelængder i trekanterne.

Opgave 2

Et andengradspolynomium er bestemt ved

$$P(x) = 3x^2 - 6x + 7.$$

Grafen for P har et toppunkt.

Bestem koordinatsættet til dette toppunkt.

Opgave 3

En vase fyldes op med vand, så den indeholder 1,5 L. Fra vasen fordamper der 0,2 L vand i løbet af en uge.

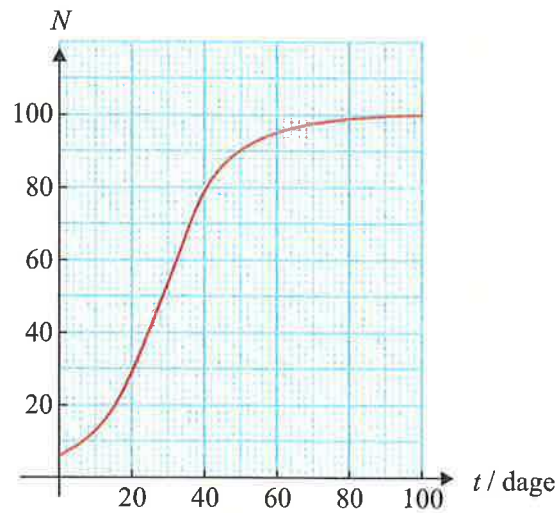
Indfør passende variable, og opstil en lineær model, der beskriver udviklingen i mængden af vand i vasen fra det tidspunkt, hvor den blev fyldt op.

Opgave 4

Isolér h i ligningen $\frac{p \cdot h}{4} = 4M$.

Opgave 5 Grafen viser udviklingen i antal individer N i en bestemt population af dyr.

Til opgaven
hører et bilag



Bestem væksthastigheden for antallet af individer i populationen til tidspunktet $t = 50$.

Vedlagte bilag kan indgå i besvarelsen.

Opgave 6 To funktioner f og g er bestemt ved

$$f(x) = 2x^{3,5} + x^2 + 10$$

$$g(x) = 7x^{2,5} + 2x.$$

Undersøg, om f er en stamfunktion til g .

Besvarelsen afleveres kl. 10.00

Delprøven med hjælpemidler

Kl. 09.00 – 13.00

Opgave 7 I en større koncern A er aldersfordelingen for de ansatte

Alder (år)	20 – 30	30 – 40	40 – 50	50 – 60	60 – 70
Procentvis andel	13,6%	27,9%	25,3%	26,5%	6,7%

- a) Tegn sumkurven, og bestem kvartilsættet for aldersfordelingen blandt de ansatte.

Det oplyses, at i koncern A er den yngste og ældste medarbejder henholdsvis 21 år og 67 år. I en anden koncern B er den yngste medarbejder 22 år, den ældste medarbejder er 52 år, og kvartilsættet for aldersfordelingen blandt de ansatte er 25 år, 37 år og 45 år.

- b) Tegn et boksplot for hver af de to koncerners aldersfordeling i samme koordinatsystem, og sammenlign de to aldersfordelinger vha. disse boksplot.

Opgave 8 Tabellen viser udviklingen i danskernes gæld til det offentlige.

Årstal	2006	2007	2008	2009	2010
Gæld (mia. kr)	50,1	54,8	60,2	65,8	72,1

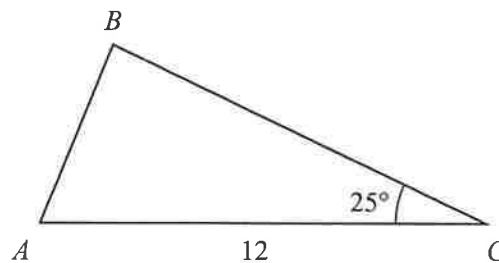
I en model kan danskernes gæld til det offentlige som funktion af antal år efter 2006 med god tilnærmelse beskrives ved

$$f(x) = b \cdot a^x,$$

hvor $f(x)$ er danskernes gæld til det offentlige (målt i mia. kr), og x er antal år efter 2006.

- a) Bestem tallene a og b .
- b) Bestem fordoblingstiden for danskernes gæld til det offentlige ifølge modellen.
- c) Bestem det årstal, hvor danskernes gæld til det offentlige ifølge modellen er vokset til 120 mia kr.

Opgave 9 I en bestemt type af trekanter ABC er $|AC|=12$ og $\angle C = 25^\circ$.



- Bestem $|AB|$ og arealet af trekant ABC , når $|BC|=10$.
- Bestem $|BC|$ og $\angle B$, når arealet af trekant ABC er 15.

Opgave 10 En sammenhæng mellem to variable x og y kan beskrives som potensvækst. Tabellen viser sammenhørende værdier af x og y .

x	1	2
y	5	15

- Bestem en ligning for sammenhængen mellem x og y , og bestem y , når $x=8$.

Opgave 11 I en model for overfladearealet af en menneskekrop er

$$O = m^{0,425} \cdot h^{0,725} \cdot 0,007184,$$

hvor O er personens overfladeareal (målt i m^2), m er personens vægt (målt i kg) og h er personens højde (målt i cm).

En bestemt person er 150 cm høj og vejer 67 kg.

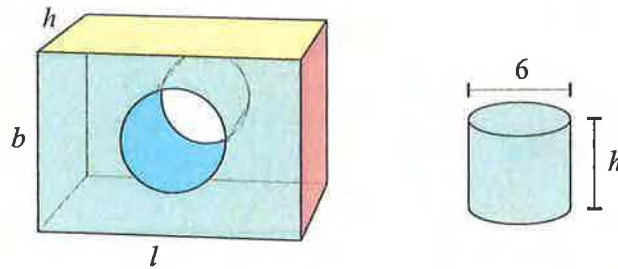
- Bestem personens overfladeareal.

En anden person har et overfladeareal på $2,16 \text{ m}^2$ og vejer 92 kg.

- Bestem denne persons højde.

Kilde: <http://www-users.med.cornell.edu/~spon/picu/calc/bsacalc.htm>

Opgave 12



I en træklods med længde l , bredde b og højde h er der udskåret en cylinder med diameter 6, som vist på figuren (alle mål i cm).

- a) Bestem volumen af træet i klodsens udtrykt ved l , b og h , når cylinderen er udskåret.

Opgave 13

En funktion f er givet ved

$$f(x) = (1 - x^2) \cdot e^x.$$

- a) Tegn grafen for f , og bestem en ligning for tangenten til grafen for f i punktet $P(1, f(1))$.
- b) Bestem monotoniforholdene for f .
- c) Bestem $\int_{-1}^1 f(x) dx$, og gør rede for, hvad dette tal fortæller.

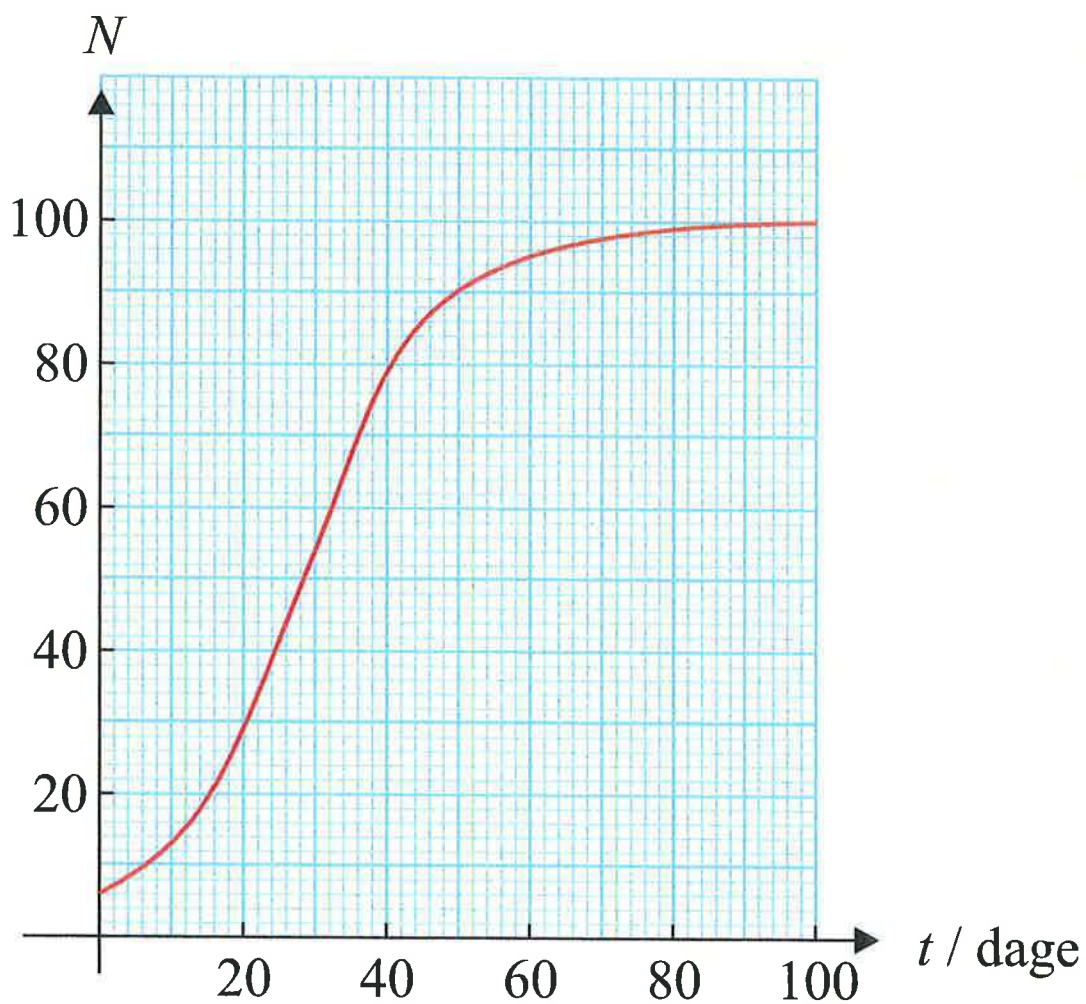
BILAG

Stx matematik B december 2012

Bilaget kan indgå i besvarelsen.

Skole	Hold	ID
Navn	Ark nr	Antal ark i alt
		Tilsynsførende

5





**MINISTERIET FOR
BØRN OG
UNDERVISNING**
KVALITETS- OG
TILSYNSSTYRELSEN

Matematik A

Studentereksamen

Opgavesættet er delt i to dele.

Delprøven uden hjælpemidler består af opgave 1-6 med i alt 6 spørgsmål.
Delprøven med hjælpemidler består af opgave 7-15 med i alt 19 spørgsmål.

De 25 spørgsmål indgår med lige vægt i bedømmelsen.

Bedømmelsen af det skriftlige eksamenssæt

I bedømmelsen af besvarelsen af de enkelte spørgsmål og i helhedsindtrykket vil der blive lagt vægt på, om eksaminandens tankegang fremgår klart af besvarelsen. Dette vurderes blandt andet ud fra kravene beskrevet i de følgende fem kategorier:

1. TEKST

Besvarelsen skal indeholde en forbindende tekst fra start til slut, der giver en klar præsentation af, hvad den enkelte opgave og de enkelte delspørgsmål går ud på.

2. NOTATION OG LAYOUT

Der kræves en hensigtsmæssig opstilling af besvarelsen i overensstemmelse med god matematisk skik, herunder en redegørelse for den matematiske notation, der indføres og anvendes, og som ikke kan henføres til standardviden.

3. REDEGØRELSE OG DOKUMENTATION

Besvarelsen skal indeholde en redegørelse for den anvendte fremgangsmåde og dokumentation i form af et passende antal mellemregninger og/eller en matematisk forklaring på brugen af de forskellige faciliteter, som et værktøjsprogram tilbyder.

4. FIGURER

I besvarelsen skal der indgå en hensigtsmæssig brug af figurer og illustrationer, og der skal være en tydelig sammenhæng mellem tekst og figurer.

5. KONKLUSION

Besvarelsen skal indeholde en afrunding af de forskellige spørgsmål med præcise konklusioner, præsenteret i et klart sprog og/eller med brug af almindelig matematisk notation.

Delprøven uden hjælpemidler

Kl. 09.00 – 10.00

Opgave 1 I et koordinatsystem i planen er to vektorer $\vec{a}$ og $\vec{b}$ givet ved

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ t \end{pmatrix} \text{ og } \vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 8 \end{pmatrix}.$$

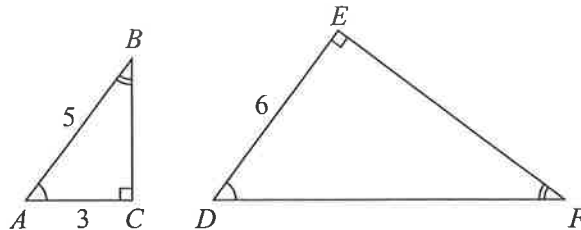
Bestem t , så $\vec{a}$ og $\vec{b}$ er parallelle.

Opgave 2 En parabel er graf for funktionen

$$p(x) = x^2 - 10x + 24.$$

Bestem førstekoordinaten til hvert af parablens skæringspunkter med førsteaksen.

Opgave 3



Figuren viser to trekanter ABC og DFE , der er retvinklede og ensvinklede. Nogle af sidelængderne er opgivet på figuren.

Bestem $|BC|$ og $|DF|$.

Opgave 4 En funktion f er bestemt ved

$$f(x) = 3x^2 + 6x.$$

Bestem en forskrift for den stamfunktion til f , hvis graf går gennem punktet $P(1, 2)$.

Opgave 5 En funktion f er løsning til differentialligningen

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y-1}{x}, \quad x > 0,$$

og grafen for f går gennem punktet $P(2, 7)$.

Bestem en ligning for tangenten til grafen for f i punktet P .

Opgave 6 En funktion f er givet ved

$$f(x) = \ln x - x + 3, \quad x > 0.$$

Bestem monotoniforholdene for f .

Besvarelsen afleveres kl. 10.00
--

Delprøven med hjælpemidler

Kl. 09.00 – 14.00

Opgave 7 I et koordinatsystem i planen er givet to punkter $C(-1, 4)$ og $P(2, 8)$.

a) Opskriv en ligning for den cirkel, der går gennem P og har centrum i C .

En linje i planen er givet ved parameterfremstillingen

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 15 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 7 \end{pmatrix}, t \in \mathbb{R}.$$

b) Bestem koordinatsættet til hvert af linjens skæringspunkter med cirklen.

Opgave 8 En gruppe på 40 personer har været ved lægen og fået målt det systoliske blodtryk. Gruppen består af 20 kvinder og 20 mænd. Kvartilsættet for kvindernes systoliske blodtryk er (117, 120, 122), og det laveste og højeste systoliske blodtryk for kvinderne er henholdsvis 115 og 128.

De målte systoliske blodtryk for mændene i gruppen er:

119, 129, 120, 121, 122, 129, 122, 127, 123, 119,
120, 123, 127, 128, 129, 120, 121, 123, 127, 129

a) Tegn i samme koordinatsystem to boksplot, der viser fordelingen af det systoliske blodtryk for henholdsvis de 20 kvinder og de 20 mænd.

b) Sammenlign fordelingen af det systoliske blodtryk i de to grupper, idet blandt andet medianens betydning for hver af de to grupper inddrages i sammenligningen.

- Opgave 9** Tabellen viser sammenhørende værdier af vægt (målt i kg) og hvilestofskiftet (målt i kcal/døgn) for forskellige pattedyr.

Vægt (kg)	0,3	2,4	6,4	13	29,3	51,8	59,6
Hvilestofskifte (kcal/døgn)	28	135	293	520	956	1394	1591

I en model er hvilestofskiftet $f(x)$ (målt i kcal/døgn) som funktion af vægten x (målt i kg) af typen

$$f(x) = b \cdot x^a.$$

- Bestem a og b .
- Benyt modellen til at bestemme hvilestofskiftet for et pattedyr, der vejer 20 kg.
- Bestem den procentvise ændring i hvilestofskiftet ved en vægtforøgelse på 15%.

- Opgave 10** I trekant ABC er $\angle A = 48^\circ$, $|AC| = 13$ og $|BC| = 10$. Det oplyses, at $\angle B$ er stump.

- Tegn en model af trekanten, og bestem $|AB|$.

En linje fra B skærer siden AC i punktet D , således at arealet af trekant BCD er 9.

- Bestem $|DC|$.

- Opgave 11** En model for den årlige globale CO_2 -udledning er givet ved

$$P(t) = 60,297 \cdot 10^9 \cdot 1,031^t,$$

hvor $P(t)$ betegner den årlige globale CO_2 -udledning (målt i tons) til tidspunktet t (målt i år efter 1950).

- Gør rede for, hvad konstanterne i modellen fortæller om udviklingen i den årlige globale CO_2 -udledning efter 1950.

Samtidig er en model for befolkningsudviklingen i verden givet ved

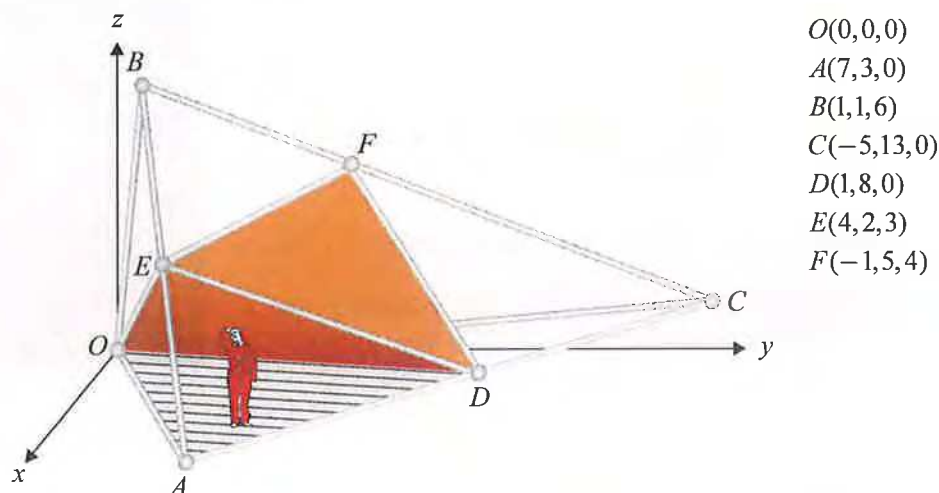
$$N(t) = 6,72 \cdot 10^7 \cdot t + 2,594 \cdot 10^9,$$

hvor $N(t)$ betegner befolkningstallet i verden til tidspunktet t (målt i antal år efter 1950).

- Opstil en model, der beskriver den gennemsnitlige årlige CO_2 -udledning pr. person (målt i tons) som funktion af tiden t (målt i år efter 1950), og benyt modellen til at give et skøn over den gennemsnitlige årlige CO_2 -udledning pr. person i 2012.

Opgave 12

På figuren ses en model af en stålkonstruktion, som danner indgangen til et underjordisk udstillingsrum i en museumshave. Hele konstruktionen er indtegnet i et koordinatsystem, hvor enheden på akserne er 1 m.



- Bestem en ligning for den plan α , der indeholder sidefladen ODE .
- Bestem afstanden fra punktet F til sidefladen ODE .

Stålkonstruktionen ABC er en del af planen β , der har ligningen

$$5x + 6y + 7z = 53.$$

- Bestem den stumpe vinkel mellem sidefladen ODE og β .

Opgave 13

En funktion f er givet ved

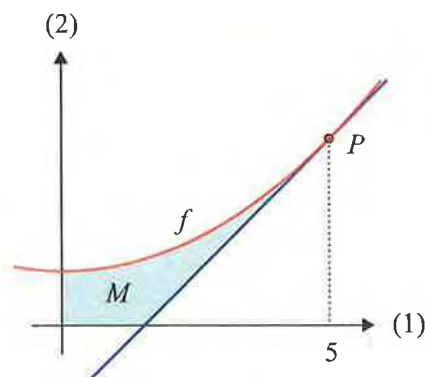
$$f(x) = 1 + 0,1 \cdot x^2.$$

- Bestem en ligning for tangenten til grafen for f i punktet $P(5, f(5))$.

Grafen for f og tangenten til grafen for f i punktet P afgrænser sammen med koordinat-akserne en punktmængde M (se figur).

Formen for en bestemt lerskål fremkommer ved, at punktmængden M drejes 360° omkring førsteaksen.

- Bestem førstekoordinaten til tangentens skæringspunkt med førsteaksen, og bestem skålens lerrumfang.



VEND!

- Opgave 14** I en model for farten af en raket, der skydes lodret op, er raketens fart som funktion af tiden en løsning til differentialligningen

$$\frac{dv}{dt} - \frac{1}{15-t} \cdot v = \frac{300}{15-t} - 9,81, \quad 0 \leq t \leq 14$$

hvor $v(t)$ er raketens fart (målt i m/s) til tidspunktet t målt i sekunder efter affyring.

Til tidspunktet $t = 0$ er raketens fart 0 m/s.

- a) Bestem en forskrift for v , og bestem det tidspunkt, hvor raketens fart når op på 1000 m/s.

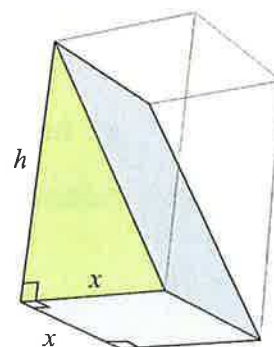


Foto: NASA

- Opgave 15** En kile fremkommer ved at save en kasseformet træklods med kvadratisk bund midt over som vist på figuren. Sidelængden i bunden er x , og klodsens højde er h (begge målt i cm). Det oplyses, at kilens volumen er 100 cm^3 .

- a) Bestem h udtrykt ved x , og gør rede for, at kilens overflade udtrykt ved x kan skrives som

$$O(x) = x \cdot \sqrt{x^2 + \frac{40000}{x^4}} + x^2 + \frac{400}{x}.$$



- b) Bestem x , så kilens overflade bliver mindst mulig, idet $0 < x < 10$.



**MINISTERIET FOR
BØRN OG
UNDERVISNING**
KVALITETS- OG
TILSYNSSTYRELSEN

Matematik B

Studentereksamen

Fredag den 7. december 2012
kl. 9.00 - 13.00

Opgavesættet er delt i to dele.

Delprøven uden hjælpemidler består af opgave 1-6 med i alt 6 spørgsmål.
Delprøven med hjælpemidler består af opgave 7-14 med i alt 14 spørgsmål.

De 20 spørgsmål indgår med lige vægt i bedømmelsen.

Bedømmelsen af det skriftlige eksamenssæt

I bedømmelsen af besvarelsen af de enkelte spørgsmål og i helhedsindtrykket vil der blive lagt vægt på, om eksaminandens tankegang fremgår klart af besvarelsen. Dette vurderes blandt andet ud fra kravene beskrevet i de følgende fem kategorier:

1. TEKST

Besvarelsen skal indeholde en forbindende tekst fra start til slut, der giver en klar præsentation af, hvad den enkelte opgave og de enkelte delspørgsmål går ud på.

2. NOTATION OG LAYOUT

Der kræves en hensigtsmæssig opstilling af besvarelsen i overensstemmelse med god matematisk skik, herunder en redegørelse for den matematiske notation, der indføres og anvendes, og som ikke kan henføres til standardviden.

3. REDEGØRELSE OG DOKUMENTATION

Besvarelsen skal indeholde en redegørelse for den anvendte fremgangsmåde og dokumentation i form af et passende antal mellemregninger og/eller en matematisk forklaring på brugen af de forskellige faciliteter, som et værktøjsprogram tilbyder.

4. FIGURER

I besvarelsen skal der indgå en hensigtsmæssig brug af figurer og illustrationer, og der skal være en tydelig sammenhæng mellem tekst og figurer.

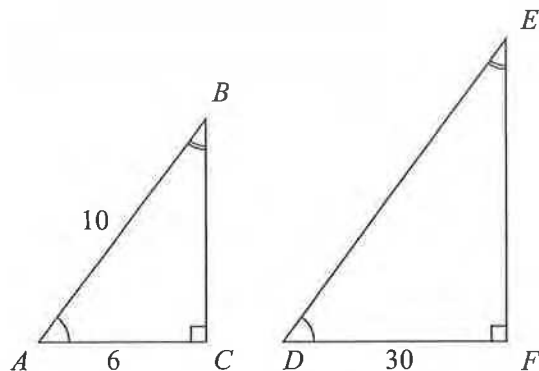
5. KONKLUSION

Besvarelsen skal indeholde en afrunding af de forskellige spørgsmål med præcise konklusioner, præsenteret i et klart sprog og/eller med brug af almindelig matematisk notation.

Delprøven uden hjælpemidler

Kl. 09.00 – 10.00

Opgave 1



Størrelsesforholdene er ikke korrekte

På figuren ses to retvinklede trekanter ABC og DEF , der er ensvinklede. Nogle af sidelængderne er angivet på figuren.

Bestem de resterende sidelængder i trekanterne.

Opgave 2

Et andengradspolynomium er bestemt ved

$$P(x) = 3x^2 - 6x + 7.$$

Grafen for P har et toppunkt.

Bestem koordinatsættet til dette toppunkt.

Opgave 3

En vase fyldes op med vand, så den indeholder 1,5 L. Fra vasen fordamper der 0,2 L vand i løbet af en uge.

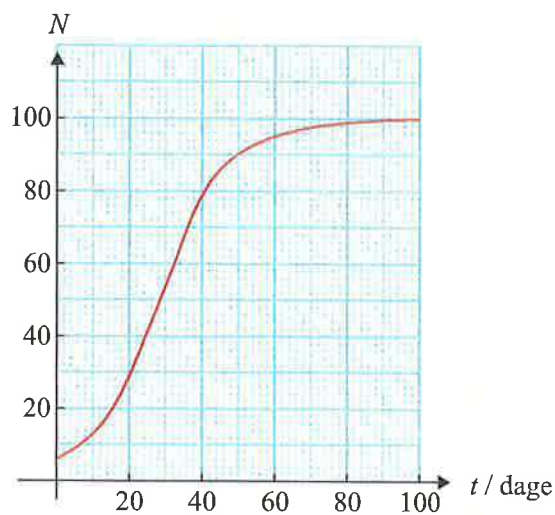
Indfør passende variable, og opstil en lineær model, der beskriver udviklingen i mængden af vand i vasen fra det tidspunkt, hvor den blev fyldt op.

Opgave 4

Isolér h i ligningen $\frac{p \cdot h}{4} = 4M$.

Opgave 5 Grafen viser udviklingen i antal individer N i en bestemt population af dyr.

Til opgaven
hører et bilag



Bestem væksthastigheden for antallet af individer i populationen til tidspunktet $t = 50$.

Vedlagte bilag kan indgå i besvarelsen.

Opgave 6 To funktioner f og g er bestemt ved

$$f(x) = 2x^{3,5} + x^2 + 10$$

$$g(x) = 7x^{2,5} + 2x.$$

Undersøg, om f er en stamfunktion til g .

Besvarelsen afleveres kl. 10.00

Delprøven med hjælpemidler

Kl. 09.00 – 13.00

Opgave 7 I tabellen ses aldersfordelingen blandt de ansatte i en større koncern.

Alder (år)	20 – 30	30 – 40	40 – 50	50 – 60	60 – 70
Procentvis andel	13,6%	27,9%	25,3%	26,5%	6,7%

- a) Tegn sumkurven, og bestem kvartilsættet for aldersfordelingen.

Opgave 8 Tabellen viser udviklingen i danskernes gæld til det offentlige.

Årstal	2006	2007	2008	2009	2010
Gæld (mia. kr)	50,1	54,8	60,2	65,8	72,1

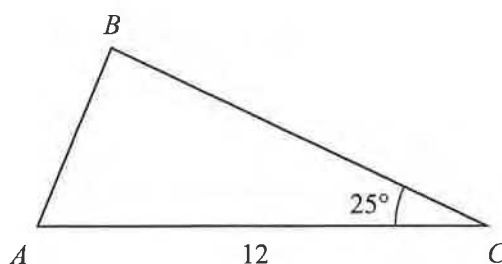
I en model kan danskernes gæld til det offentlige som funktion af antal år efter 2006 med god tilnærmelse beskrives ved

$$f(x) = b \cdot a^x,$$

hvor $f(x)$ er danskernes gæld til det offentlige (målt i mia. kr), og x er antal år efter 2006.

- Bestem tallene a og b .
- Bestem fordoblingstiden for danskernes gæld til det offentlige ifølge modellen.
- Bestem det årstal, hvor danskernes gæld til det offentlige ifølge modellen er vokset til 120 mia kr.

Opgave 9 I en bestemt type af trekanter ABC er $|AC| = 12$ og $\angle C = 25^\circ$.



- Bestem $|AB|$ og arealet af trekant ABC , når $|BC| = 10$.
- Bestem $|BC|$ og $\angle B$, når arealet af trekant ABC er 15.

- Opgave 10** En sammenhæng mellem to variable x og y kan beskrives som potensvækst. Tabellen viser sammenhørende værdier af x og y .

x	1	2
y	5	15

- a) Bestem en ligning for sammenhængen mellem x og y , og bestem y , når $x = 8$.

- Opgave 11** I en model for overfladearealet af en menneskekrop er

$$O = m^{0,425} \cdot h^{0,725} \cdot 0,007184,$$

hvor O er personens overfladeareal (målt i m^2), m er personens vægt (målt i kg) og h er personens højde (målt i cm).

En bestemt person er 150 cm høj og vejer 67 kg.

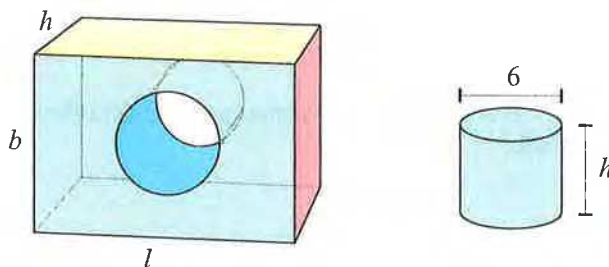
- a) Bestem personens overfladeareal.

En anden person har et overfladeareal på $2,16 \text{ m}^2$ og vejer 92 kg.

- b) Bestem denne persons højde.

Kilde: <http://www-users.med.cornell.edu/~spon/picu/calc/bsacalc.htm>

- Opgave 12**



I en træklods med længde l , bredde b og højde h er der udskåret en cylinder med diameter 6, som vist på figuren (alle mål i cm).

- a) Bestem volumen af træet i klodsen udtrykt ved l , b og h , når cylinderen er udskåret.

Opgave 13 En funktion f er givet ved

$$f(x) = (1 - x^2) \cdot e^x.$$

- Tegn grafen for f , og bestem en ligning for tangenten til grafen for f i punktet $P(1, f(1))$.
- Bestem monotoniforholdene for f .
- Bestem $\int_{-1}^1 f(x) dx$, og gør rede for, hvad dette tal fortæller.

Opgave 14 Blandt beboerne i to boligkvarterer i en by bliver en stikprøve af tilfældigt udvalgte personer spurgt, om det udendørs støjniveau generer. Nedenstående tabel viser hvordan personerne i stikprøven kan opdeles efter boligkvarter og svar vedrørende gene af det udendørs støjniveau.

	Boligkvarter A	Boligkvarter B
Det udendørs støjniveau generer	62	71
Det udendørs støjniveau generer ikke	140	99

- Beskriv populationen, og opstil en nulhypotese, der kan teste uafhængighed mellem boligkvarter og svar vedrørende gene af det udendørs støjniveau. Test denne nulhypotese med et signifikansniveau på 5%.

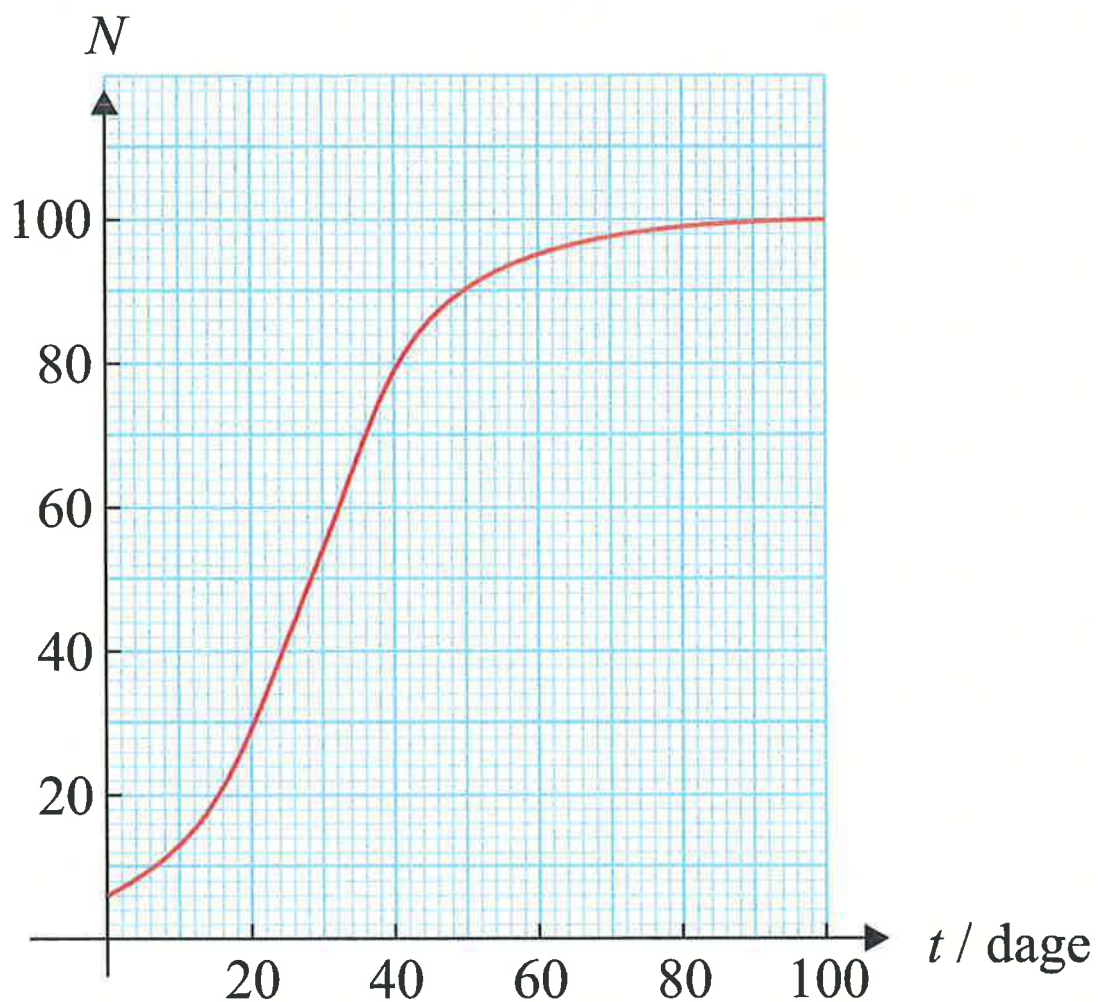
BILAG

Stx matematik B december 2012

Bilaget kan indgå i besvarelsen.

Skole	Hold		ID
Navn	Ark nr	Antal ark i alt	Tilsynsførende

5





**MINISTERIET FOR
BØRN OG
UNDERVISNING**
KVALITETS- OG
TILSYNSSTYRELSEN

Matematik A

Studentereksamen

Forberedelsesmateriale til de digitale
eksamensopgaver med adgang til internettet

Forberedelsesmateriale til stx-A-Net MATEMATIK

Der skal afsættes 6 timer af holdets sædvanlige uddannelsestid til, at eleverne kan arbejde med forberedelsesmaterialet forud for den skriftlige prøve.

3-5 delspørgsmål i delprøve 2 af den skriftlige prøve tager udgangspunkt i det materiale, der findes i dette oplæg. De øvrige spørgsmål omhandler emner fra kernestoffet.

Oplægget indeholder teori, eksempler og øvelser i tilknytning til et emne, der ligger umiddelbart i forlængelse af et kernestofemne.

Resultaterne af arbejdet med dette forberedelsesmateriale bør medbringes til den skriftlige prøve.

Alle hjælpemidler er tilladt, og det er tilladt at modtage vejledning.

Indhold

Indledning.....	1
Funktioner af en variabel.....	2
Funktioner af to variable	3
Partiel differentiation.....	6
Gradient	7
Tangentplaner	9
Ekstrema for funktioner af en variabel	11
Ekstrema for funktioner af to variable.....	13
Dobbeltafledede og blandede afledede.....	15

Indledning

Emnet for dette forberedelsesmateriale er funktioner af to variable. Med udgangspunkt i din viden om differentialregning for funktioner af én variabel skal du arbejde med differentialregning for funktioner af to variable. Bemærk, at der ikke stilles skriftlige eksamensopgaver omhandlende snit- og niveaukurver. Disse er dog nødvendige for at belyse emnet teoretisk.

På nettet findes mange ressourcer med animationer i relation til dette emne se fx *Animated Demonstrations for Multivariable Calculus*, af John F. Putz, Mathematics and Computer Science Department, Alma College, Michigan: <http://archives.math.utk.edu/ICTCM/VOL10/C009/paper.html>.

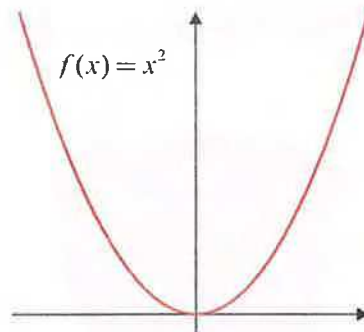
Forberedelsesmateriale er inspireret af MATEMATIK OG DATABEHANDLING: NOTER OM MATEMATIK, KVL, 2006, Henrik Laurberg Pedersen og Thomas Vils Pedersen.

Funktioner af en variabel

Når vi tegner grafen for en funktion f , så vælger vi at tegne et udsnit af grafen forstået på den måde, at vi vælger et grafvindue, så vi får et relevant indtryk af grafens forløb. Vi kan vælge at fokusere på sammenhængen mellem bestemte x -værdier og y -værdier på grafen for f .

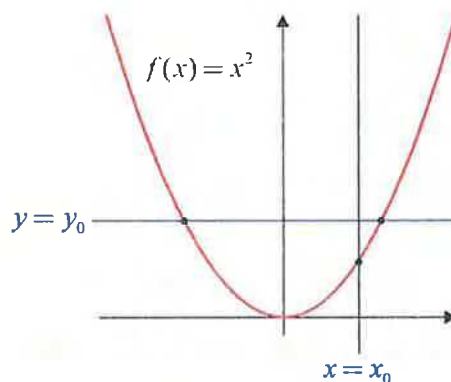
Eksempel 1: Lodret og vandret snit

Andengradspolynomiet $f(x) = x^2$ er et eksempel på en funktion af én variabel – her er x den uafhængige variabel, og $y = f(x)$ er den afhængige variabel. Hvis vi vælger grafvinduet, hvor x -værdierne ligger i intervallet $[-5; 5]$ og y -værdierne i intervallet $[-1; 30]$, så får vi følgende grafiske billede:



Vi skriver, at vi har valgt grafvinduet $[-5; 5] \times [-1; 30]$.

Vælger vi en bestemt x -værdi fx $x = x_0$, så får vi en bestemt funktionsværdi $y_0 = f(x_0)$. Dette kan vi illustrere grafisk ved at bestemme skæringspunktet mellem parablen og den lodrette linje $x = x_0$. Dette kalder vi et *lodret snit* af parablen. Vælger vi omvendt en bestemt funktionsværdi $y = y_0$, kan vi grafisk illustrere de tilhørende x -værdier ved at bestemme skæringspunkterne mellem parablen og en vandret linje $y = y_0$. Dette kalder vi et *vandret snit* af parablen.



Øvelse 1

En funktion f er givet ved $f(x) = \frac{6x}{x^2 + 3}$.

- Tegn grafen for f i et relevant grafvindue.
- Tegn i samme grafvindue det lodrette snit mellem grafen for f og linjen med ligningen $x = 2$.
- Tegn i samme grafvindue det vandrette snit mellem grafen for f og linjen med ligningen $y = 1$.

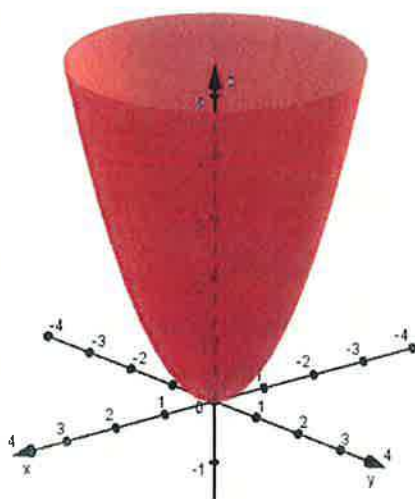
Funktioner af to variable

Vi vil nu udvide funktionsbegrebet til at omfatte funktioner af to variable, dvs. funktioner, hvor der er to uafhængige variable og en afhængig variabel. Grafen for en funktion af to variable er en tredimensional figur. Givet en funktion af to variable $f(x, y)$ får vi for hvert par af x -værdier og y -værdier en z -værdi $z = f(x, y)$.

Eksempel 2: Grafen for en funktion af to variable

Funktionen $f(x, y) = x^2 + y^2$ er et eksempel på en funktion af to variable, hvor x og y er de uafhængige variable, og $z = f(x, y)$ er den afhængige variabel.

Grafen for f kan tegnes i et (x, y, z) -koordinatsystem, og hvis vi vælger grafvinduet $[-3, 3] \times [-3, 3] \times [-2, 5]$, så får vi:



Øvelse 2

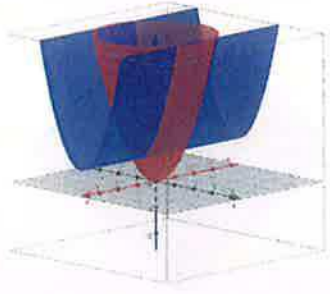
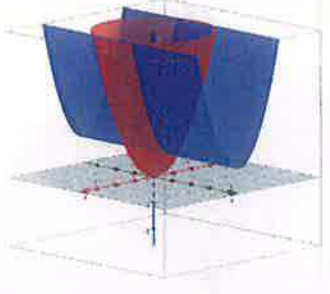
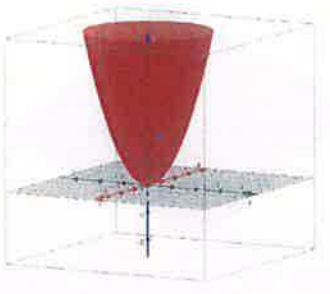
Tegn den tilsvarende graf for $f(x, y) = x^2 + y^2$ i dit værktøjsprogram. Vælg selv et grafvindue, så du får et relevant udsnit af grafen for f .

Definition 1: Funktion af to variable

Grafen for en funktion af to variable $z = f(x, y)$ består af punkterne $(x, y, z) = (x, y, f(x, y))$, hvor x og y gennemløber de reelle tal, medmindre andet er angivet.

Lodret snit og punkt

Betragter vi nu funktioner af to variable, så kan vi vælge at holde en af de to uafhængige variable fast, dvs. $x = x_0$ eller $y = y_0$, eller holde begge de uafhængige variable fast, dvs. $x = x_0$ og $y = y_0$. De tre forskellige situationer kan beskrives som følger:

$x = x_0$ og y variabel	x variabel og $y = y_0$	$x = x_0$ og $y = y_0$
 Hvis vi vælger $x_0 = 1$, får vi en funktion af én variabel, nemlig variablen y: $f(1, y) = 1 + y^2$. Grafen for denne funktion er en parabelformet rende, som vist på figuren. Funktionen kaldes en snitfunktion i y, og grafen kaldes en snitgraf for f.	 Hvis vi vælger $y_0 = 1$, får vi en funktion af én variabel, nemlig variablen x: $f(x, 1) = x^2 + 1$. Grafen for denne funktion er en parabelformet rende, som vist på figuren. Funktionen kaldes en snitfunktion i x, og grafen kaldes en snitgraf for f.	 Hvis vi vælger $x_0 = 1$ og $y_0 = 1$, får vi et punkt på grafen fordi z-koordinaten er givet, idet $z_0 = f(x_0, y_0)$. Punktets koordinater bliver: $(x_0, y_0, z_0) = (1, 1, f(1, 1)) = (1, 1, 2)$.

Definition 2: Snitfunktion og snitkurve

En snitfunktion for en funktion f af to variable er defineret ved

$$g(x) = f(x, y), \text{ hvor } y \text{ holdes fast eller}$$

$$g(y) = f(x, y), \text{ hvor } x \text{ holdes fast.}$$

Graferne for $g(x)$ og $g(y)$ kaldes for snitkurver for f i henholdsvis x og y .

Øvelse 3

Der er givet en funktion af to variable $f(x, y) = x^2 + y^2$.

- Bestem en forskrift for snitfunktionen for f i x , når $y_0 = 2$.
- Bestem en forskrift for snitfunktionen for f i y , når $x_0 = 2$.
- Bestem punktet på grafen for f , når $x_0 = 2$ og $y_0 = 2$.

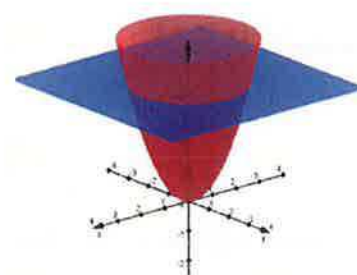
Eksempel 3: Niveaukurve

For funktionen

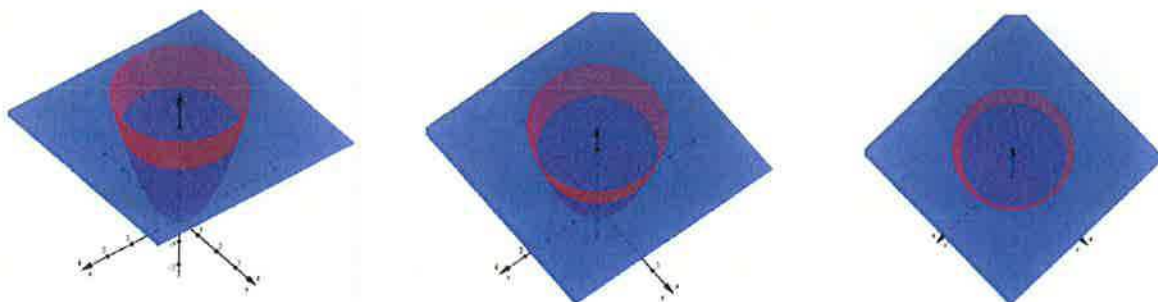
$$f(x, y) = x^2 + y^2$$

kan vi også vælge en fast værdi for den afhængige variabel fx. $z = 4$. Således er:

$$f(x, y) = 4 \quad \text{dvs.} \quad x^2 + y^2 = 4.$$



Den kurve, der fremkommer ved dette vandrette snit parallelt med xy -planen kaldes en *niveaukurve*, og er i dette tilfælde en cirkel. På nedenstående figurer ses niveaukurven fra forskellige vinkler.



Definition 3: Niveaukurve

En niveaukurve for en funktion f af to variable er den skæringskurve, der fremkommer, når grafen for f skæres af en vandret plan (dvs. en plan parallel med xy -planen) med ligningen $z = k$, hvor k er en konstant.

Niveaukurven kan således beskrives ved ligningen: $f(x, y) = k$.

Øvelse 4

Bestem ligningen for niveaukurven for funktionen $f(x, y) = x^2 + y^2$, når $k = 81$.

For hvilke værdier af k findes der ingen niveaukurve for f ?

Øvelse 5

To funktioner f og g af to variable er givet ved

$$f(x, y) = \frac{6x}{x^2 + y^2 + 3} \quad \text{og} \quad g(x, y) = \frac{6y}{x^2 + y^2 + 3}.$$

- Tegn grafen for hver af funktionerne f og g .
- Tegn grafen for snitfunktionen for f og g i x , når $y_0 = 2$.
- Tegn grafen for snitfunktionen for f og g i y , når $x_0 = -2$.
- Tegn niveaukurven for f og g , når $k = 1$.

Øvelse 6

Tegn graferne for

$$f(x, y) = \frac{6x}{x^2 + y^2 + 3} \quad \text{og} \quad g(x, y) = \frac{6y}{x^2 + y^2 + 3},$$

og sammenlign de grafiske forløb under inddragelse af snitfunktioner samt niveaukurver for f og g .

Øvelse 7

Volumenet af en cylinder er givet ved $V = \pi \cdot r^2 \cdot h$, hvor r er radius og h er højden i cylinderen.

- Hvordan kan udtrykket for cylinderens volumen skrives som en funktion af to variable?
- Tegn grafen for funktionen af to variable, og undersøg denne grafisk med henblik på snitkurver og niveaukurver.

Partiel differentiation

Differentiation er et centralt begreb i forbindelse med funktioner af én variabel, da differentialkvotienten i et givet punkt bestemmer tangentens hældningskoefficient i punktet og dermed fortæller, hvorledes grafen for funktioner af én variabel forløber.

Øvelse 8

Repetér regneregler for differentiation af funktioner af en variabel.

Når vi skal differentiere funktioner af to variable, ser vi på én variabel ad gangen.

Vi betragter altså de to snitfunktioner, hvor vi opfatter henholdsvis x og y som en konstant, og differentierer snitfunktionerne jf. de regneregler, der gælder for funktioner af en variabel.

Det kaldes *partiell differentiation*, og vi får to afledede funktioner, der kaldes de partielt afledede.

Definition 4: Partielt afledede

Den partielt afledede $f'_x(x, y)$ af $f(x, y)$ mht. til x bestemmes ved at differentiere snitfunktionen $g(x) = f(x, y)$, når y fastholdes. Der gælder altså $f'_x(x, y) = g'(x)$.

På samme måde bestemmes den partielt afledede $f'_y(x, y)$ af $f(x, y)$ mht. y ved at differentiere snitfunktionen $g(y) = f(x, y)$, når x fastholdes. Der gælder altså $f'_y(x, y) = g'(y)$.

De partielt afledede af $f(x, y)$ mht. x og y betegnes også $\frac{\partial}{\partial x} f(x, y)$ hhv. $\frac{\partial}{\partial y} f(x, y)$.

Eksempel 4: Partielt afledede

De partielt afledede af funktionen $f(x, y) = x^2 + y^2$ bestemmes ved at differentiere de to snitfunktioner $g(x) = x^2 + y^2$, hvor først y holdes konstant og dernæst x holdes konstant:

$$f'_x(x, y) = g'(x) = (x^2)' + (y^2)' = 2x + 0 = 2x.$$

Tilsvarende fås:

$$f'_y(x, y) = g'(y) = (x^2)' + (y^2)' = 0 + 2y = 2y.$$

Øvelse 9

Bestem de partielt afledede af funktionen $f(x, y) = x^2 + y^2$ vha. dit værktøjsprogram.

Eksempel 5: Partielt afledede

Vi bestemmer de partielt afledede af funktionen $f(x, y) = \frac{6y}{x^2 + y^2 + 4}$.

Først bestemmer vi den afledede mht. x , hvor vi anvender kædereglens for differentiation af sammensat

$$\text{funktion: } f'_x(x, y) = g'(x) = \left(\frac{6y}{x^2 + y^2 + 4} \right)' = \frac{-6y}{(x^2 + y^2 + 4)^2} \cdot 2x = \frac{-12xy}{(x^2 + y^2 + 4)^2}$$

Derefter bestemmer vi den afledede mht. y , hvor vi anvender produktreglen og kædereglens:

$$\begin{aligned} f'_y(x, y) &= g'(y) = \left(\frac{6y}{x^2 + y^2 + 4} \right)' = \left(6y \cdot \frac{1}{x^2 + y^2 + 4} \right)' \\ &= 6y \cdot \frac{-1}{(x^2 + y^2 + 4)^2} \cdot 2y + \frac{6}{x^2 + y^2 + 4} = \frac{-12y^2}{(x^2 + y^2 + 4)^2} + \frac{6}{x^2 + y^2 + 4} \end{aligned}$$

De ovenstående partielt afledede kan også bestemmes vha. et værktøjsprogram.

Øvelse 10

Bestem vha. dit værktøjsprogram de partielt afledede for funktionen $f(x, y) = \frac{6x}{x^2 + y^2 + 3}$.

Øvelse 11

Bestem vha. dit værktøjsprogram de partielt afledede af følgende funktioner:

a) $f(x, y) = x^3 \cdot y + \frac{1}{x + y}, \quad x \neq -y$

b) $f(x, y) = (x + y)^3 + 4$

c) $f(x, y) = e^{x+y}$

En funktion af to variable siges at være differentiabel, hvis de partielt afledede findes og er kontinuerte. Dette vil vi ikke gå i nærmere detalje med her, men blot oplyse, at de funktioner af to variable, der omtales i det følgende, alle er differentiable.

Gradient

For en funktion f af en variabel gælder, at den afledede funktion $f'(x_0)$ angiver hældningskoefficienten for tangenten til grafen for f i punktet $(x_0, y_0) = (x_0, f(x_0))$.

Tilsvarende gælder der for en funktion f af to variable, at den partielt afledede $f'_x(x_0, y_0)$ beskriver hældningskoefficienten for tangenten i punktet $(x_0, y_0, z_0) = (x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ på snitgrafen for snitfunktionen $g(x)$, og $f'_y(x, y)$ angiver hældningskoefficienten for tangenten i punktet $(x_0, y_0, z_0) = (x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ på grafen for snitfunktionen $g(y)$.

De to partielt afledede er henholdsvis første- og andenkoordinat for en vektor, der kaldes gradienten for f .

Definition 5: Gradient

For en funktion $f(x, y)$ med partielt afledede $f'_x(x, y)$ og $f'_y(x, y)$ defineres gradienten for f som

$$\text{grad}(f)(x, y) = \begin{pmatrix} f'_x(x, y) \\ f'_y(x, y) \end{pmatrix}$$

Gradienten har den egenskab, at den peger i den retning, hvor funktionsværdien har den største positive ændring. Det betyder med andre ord, at hvis vi står i et punkt på grafen for f , så vil gradienten, tænkt som en vektor i xy -planen, angive den retning, hvor grafen er stejlest. Omvendt vil funktionsværdien have den største negative ændring i den modsatte retning af, hvor gradienten peger hen. På det websted, der er nævnt i indledningen, er der adgang til en animation (nr. 10), der viser forskellige tangenter til grafen for en funktion i et bestemt punkt (direkte link: <http://archives.math.utk.edu/ICTCM/VOL10/C009/dd.gif>). Man kan se, at tangenten i punktet er stejlest, når den peger i retning af gradienten, som er angivet ved en grøn streg nederst i xy -planen.

Eksempel 6: Grafens stejlhed i et bestemt punkt på grafen

Gradienten af funktionen $f(x, y) = x^2 + y^2$ er som nævnt ovenfor:

$$\text{grad}(f)(x, y) = \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \end{pmatrix}.$$

Gradienten i punktet $P(1, 3, f(1, 3))$ er derfor:

$$\text{grad}(f)(1, 3) = \begin{pmatrix} 2 \cdot 1 \\ 2 \cdot 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \end{pmatrix}$$

Det betyder, at i punktet $P(1, 3, f(1, 3))$ er grafen for f stejlest i positiv henseende langs gradientens retning, dvs. 2 hen ad x -aksen og 6 ud ad y -aksen. Grafen for funktionen f er stejlest i negativ henseende langs vektoren $\begin{pmatrix} -2 \\ -6 \end{pmatrix}$.

Eksempel 7: Grafens stejlhed langs koordinataksene

Gradienten for funktionen $f(x, y) = \frac{6y}{x^2 + y^2 + 2}$ er

$$\text{grad}(f)(x, y) = \begin{pmatrix} f'_x(x, y) \\ f'_y(x, y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{-12xy}{(x^2 + y^2 + 2)^2} \\ \frac{6(x^2 - y^2 + 2)}{(x^2 + y^2 + 2)^2} \end{pmatrix}$$

Gradienten i punktet $O(0, 0, 0)$ er derfor: $\text{grad}(f)(0, 0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix}$.

Det betyder, at i $O(0, 0, 0)$ er grafen stejlest i positiv henseende, når man bevæger sig langs y -aksen.

Øvelse 12

Bestem vha. dit værktøjsprogram gradienterne i de to foregående eksempler.

Øvelse 13

To funktioner f og g er givet ved

$$f(x, y) = \frac{x+y}{x^2+y^2} \quad \text{og} \quad g(x, y) = \sqrt{16-2x^2-y^2}.$$

- Bestem gradienten for f i punktet $(1, 1, f(1, 1))$.
- I hvilken retning er ændringen i funktionsværdien for f stejlest i henholdsvis positiv og negativ henseende?
- Bestem gradienten for g i $(1, 2, g(1, 2))$.
- I hvilken retning er ændringen i funktionsværdien for g stejlest i henholdsvis positiv og negativ henseende?

Tangentplaner

En graf for en funktion af to variable har uendelig mange tangenter i ethvert punkt. Gradienten er en retningsvektor for den stejleste af tangenterne i et punkt. Tangenterne til grafen for f i et punkt udspænder tilsammen en plan. Denne plan kaldes tangentplanen for f .

Nedenstående sætning angiver, hvordan vi kan bestemme en ligning for en tangentplan til grafen for f i et givet punkt, men først repeteres kort teorien om planer i rummet. Ligningen for en plan kan bestemmes ud

fra en normalvektor $\vec{n} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ samt et fast punkt i planen $P_0(x_0, y_0, z_0)$. Normalvektoren $\vec{n}$ står som bekendt

vinkelret på planen, og dermed også vinkelret på alle vektorer i planen. For et vilkårligt punkt $Q(x, y, z)$ i planen, må derfor gælde, at vektoren $\overrightarrow{P_0Q}$ står vinkelret på $\vec{n}$.

Da prikproduktet mellem to vektorer, der står vinkelret på hinanden, er 0, får vi

$$\vec{n} \cdot \overrightarrow{P_0Q} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \\ z - z_0 \end{pmatrix} = 0$$

Og når vi udregner prikprodukt, får vi ligningen for tangentplanen

$$a \cdot (x - x_0) + b \cdot (y - y_0) + c \cdot (z - z_0) = 0.$$

Sætning 1: Tangentplan

Lad $f(x, y)$ være en funktion af to variable, og lad $P_0(x_0, y_0, z_0)$ være et punkt på grafen for f , dvs. $z_0 = f(x_0, y_0)$. De partielt afledede af f i punktet P_0 betegnes $p = f'_x(x_0, y_0)$ og $q = f'_y(x_0, y_0)$.

Tangentplanen for $f(x, y)$ i punktet $P_0(x_0, y_0, z_0)$ er da givet ved:

$$z = z_0 + p \cdot (x - x_0) + q \cdot (y - y_0)$$

Bevis

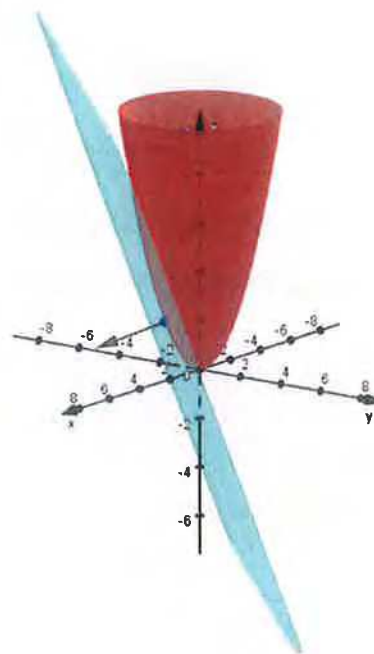
Først bestemmes en normalvektor til tangentplanen.

p er hældningskoefficienten for tangenten til snitgrafen for snitfunktionen $g(x)$, der ligger parallelt med xz -planen, da y holdes konstant. En retningsvektor for denne tangent er givet ved:

$$\vec{r}_x = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ p \end{pmatrix}$$

Tilsvarende er q hældningskoefficienten for tangenten til snitgrafen for snitfunktionen $g(y)$, der ligger parallelt med yz -planen. En retningsvektor for denne tangent er givet ved:

$$\vec{r}_y = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ q \end{pmatrix}$$



Vi ved fra rumgeometrien, at en normalvektor for en plan er bestemt ved krydsproduktet mellem to ikke-parallele vektorer i planen. Normalvektoren $\vec{n}$ for tangentplanen kan derfor bestemmes ved krydsproduktet mellem de to retningsvektorer $\vec{r}_x$ og $\vec{r}_y$, som er:

$$\vec{n} = \vec{r}_x \times \vec{r}_y = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ p \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -p \\ -q \\ 1 \end{pmatrix}$$

Således er planen bestemt ved ligningen:

$$p \cdot (x - x_0) + q \cdot (y - y_0) - 1 \cdot (z - z_0) = 0$$

$$p \cdot (x - x_0) + q \cdot (y - y_0) - z + z_0 = 0$$

$$z = z_0 + p \cdot (x - x_0) + q \cdot (y - y_0)$$

Hvilket netop var det udtryk, vi søgte.

Eksempel 8: Tangentplaner

Vi vil bestemme tangentplanen for funktionen $f(x, y) = x^2 + y^2$ i punktet $(1, -1, f(1, -1))$. Dvs. $x_0 = 1$, $y_0 = -1$ og $z_0 = f(1, -1) = 2$.

Vi indsætter punktets x -og y -koordinater i de partielt afledede, som vi fandt i eksempel 4, og vi får

$$p = f'_x(1, -1) = 2 \text{ og } q = f'_y(1, -1) = -2$$

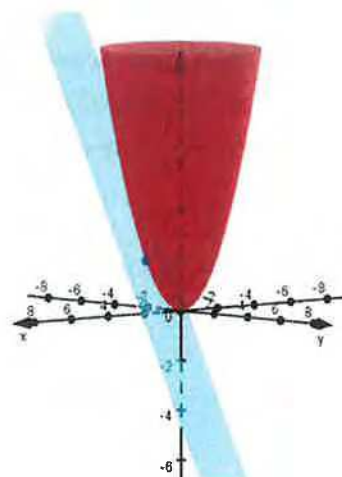
Vi indsætter nu i tangentens ligning fra sætningen ovenfor og får:

$$z = z_0 + p \cdot (x - x_0) + q \cdot (y - y_0)$$

$$z = 2 + 2 \cdot (x - 1) - 2 \cdot (y + 1)$$

$$z = 2 + 2x - 2 - 2y - 2$$

$$z = 2x - 2y - 2$$



Øvelse 14

En funktion f har forskriften

$$f(x, y) = \frac{6y}{x^2 + y^2 + 2}.$$

- a) Bestem en ligning for tangentplanen til f i punktet $(0, 1, f(0, 1))$.
- b) Tegn grafen for f sammen med tangentplanen i dit værktøjsprogram.

Øvelse 15

En funktion f er givet ved

$$f(x, y) = \sqrt{9 - x^2 - y^2}.$$

- a) Bestem de partielt afledede for f .
- b) Bestem en ligning for tangentplanen til f i punktet $(2, 2, f(2, 2))$.
- c) Tegn grafen for f sammen med tangentplanen i dit værktøjsprogram.

Ekstrema for funktioner af en variabel

Grafer for funktioner af to variable er langt sværere at undersøge grafisk end grafer for funktioner af én variabel. Analogt til funktioner af én variabel vil vi inddrage differentialregning i vores undersøgelse af grafer for funktioner af to variable.

Øvelse 16

Betragt funktionen $f(x) = \frac{6x}{x^2 + 3}.$

Bestem $f'(x)$, og bestem de lokale ekstremumssteder og de tilhørende ekstremumsværdier.

Arten (typen) af et lokalt ekstremumpunkt, dvs. om der er tale om et lokalt minimum eller et lokalt maksimum, kan vi afgøre ud fra fortegnet for $f'(x)$. Denne afgørelse kan også baseres på den dobbeltafledede $f''(x)$, så vi i en vis forstand undersøger, om $f'(x)$ er voksende eller aftagende.

Eksempel 9: Den anden afledede afgør arten af ekstremumpunkter

For funktionen $f(x) = \frac{6x}{x^2 + 9}$ gælder det, at $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = -3 \vee x = 3$ (tjek selv!).

Bestemmer vi $f''(x)$ finder vi, at $f''(-3) = \frac{1}{9}$, dvs. $f'(x)$ er voksende omkring det lokale

ekstremumpunkt, og dermed er det et lokalt minimum. Tilsvarende finder vi, at $f''(3) = -\frac{1}{9}$, dvs. $f'(x)$ er aftagende omkring det lokale ekstremumpunkt, og dermed er det et lokalt maksimum.

Øvelse 17

En funktion f er givet ved $f(x) = \frac{1}{4}x^4 - \frac{5}{3}x^3 + 4x^2 - 4x$.

- Bestem $f'(x)$, $f''(x)$ og løs $f'(x) = 0$.
- Bestem i de x -værdier, hvor $f'(x) = 0$, fortegnet for $f''(x)$.
- Benyt fortegnet for $f''(x)$ og grafen for f til at afgøre arten af de lokale ekstrema, dvs. om der er tale om lokalt minimum eller lokalt maksimum.

Øvelse 18

Vi ser på en funktion f , hvorom det i et punkt $(x_0, f(x_0))$ gælder, at både $f'(x_0) = 0$ og $f''(x_0) = 0$. Hvordan kan grafen for f se ud omkring $(x_0, f(x_0))$?

På baggrund af ovenstående generaliserer vi til følgende sætning:

Sætning 2: Arten af ekstremumpunkterne ud fra den dobbeltafledede

Lad $P_0(x_0, f(x_0))$ være et punkt på grafen for en funktion f , hvor $f'(x_0) = 0$. Da gælder der, at

- Hvis $f''(x_0) > 0$, så er x_0 et lokalt minimumssted.
- Hvis $f''(x_0) < 0$, så er x_0 et lokalt maksimumssted.
- Hvis $f''(x_0) = 0$, så kan der være en vandret vendetangent for x_0 .

Øvelse 19

Et andengradspolynomium er givet ved $f(x) = ax^2 + bx + c$.

- Bestem $f'(x)$ og $f''(x)$.
- Løs ligningen $f'(x) = 0$, og bestem fortegnet for $f''(x)$ i den fundne x -værdi.
- Hvad fortæller resultaterne i b) om forløbet af grafen for f ?

Øvelse 20

Nedenfor er angivet to traditionelle eksamensopgaver, der omhandler monoton for funktioner af én variabel. Løs disse opgaver ved i hvert tilfælde at undersøge fortegnene for den dobbelt afledede $f''(x)$.

Eksamen stx B august 2010:

En funktion f er givet ved

$$f(x) = e^x - 3x + 1$$

Bestem $f'(x)$, og gør rede for, at funktionen f har et minimum.

Eksamen stx A december 2010:

To funktioner f og g er bestemt ved

$$f(x) = x^2 - 4x + 8$$

$$g(x) = 3x \cdot e^{-x}.$$

Bestem den værdi af x , hvor den lodrette afstand mellem grafen for f og grafen for g er mindst mulig.

Ekstrema for funktioner af to variable

Ekstremumsbegrebet for funktioner af én variabel kan udvides til funktioner af to variable således, at:

- et lokalt maksimum er en funktionsværdi, der er større end alle andre funktionsværdier i nærheden af det lokale maksimum
- et lokalt minimum er en funktionsværdi, der er mindre end alle andre funktionsværdier i nærheden af det lokale minimum
- et globalt maksimum er en funktionsværdi, der er større end alle andre funktionsværdier (i definitionsmængden)
- et globalt minimum er en funktionsværdi, der er mindre end alle andre funktionsværdier (i definitionsmængden)
- et lokalt/globalt ekstremum er enten et lokalt/globalt maksimum eller minimum.

For funktioner af én variabel gælder, at hvis en funktion $f(x)$ har et lokalt ekstremum i x_0 så er $f'(x_0) = 0$. Noget tilsvarende gælder for funktioner af to variable.

Sætning 3

Antag, at $f(x, y)$ har lokalt ekstremum i punktet $P_0(x_0, y_0, z_0)$.

Så gælder der, at $f'_x(x_0, y_0) = 0$ og $f'_y(x_0, y_0) = 0$.

Bevis

Hvis $f(x, y)$ har et lokalt maksimum i $P_0(x_0, y_0, z_0) = P_0(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$, så vil snitfunktionen

$g(x) = f(x, y_0)$ have et lokalt maksimum i $x = x_0$, og derfor er $g'(x_0) = 0$.

Da $g(x) = f(x, y_0)$, så er $g'(x_0) = f'_x(x_0, y_0)$ og dermed er $f'_x(x_0, y_0) = 0$.

På helt samme måde vises, at hvis $f(x, y)$ har et lokalt maksimum i $P(x_0, y_0, z_0) = P(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$, så er $g'(y_0) = f'_y(x_0, y_0) = 0$.

Beviset er det samme, hvis funktionen har et lokalt minimum. Således er sætningen bevist.

Bemærk: Den omvendte sætning gælder ikke nødvendigvis – hverken for funktioner af én variabel eller funktioner af to variable.

For funktioner af en variabel gælder der, at hvis $f'(x_0) = 0$, så har funktionen f en vandret tangent i x_0 . Den vandrette tangent kan give anledning til et maksimum, minimum eller den kan være en vendetangent.

For funktioner af to variable gælder, at hvis $f'_x(x_0, y_0) = 0$ og $f'_y(x_0, y_0) = 0$, så er tangentplanen i $P(x_0, y_0, z_0)$ vandret, og vi får: $z = z_0 + 0 \cdot (x - x_0) + 0 \cdot (y - y_0)$, dvs. $z = z_0$.

Punkter med vandrette tangentplaner kaldes *stationære punkter*. Stationære punkter er ikke nødvendigvis maksimumpunkter eller minimumpunkter. De kan også være såkaldte saddelpunkter.

Definition 6: Stationære punkter

Et punkt $P_0(x_0, y_0, z_0)$, hvor $z_0 = f(x_0, y_0)$ kaldes et stationært punkt for en funktion $f(x, y)$ af to variable, hvis $f'_x(x_0, y_0) = 0$ og $f'_y(x_0, y_0) = 0$.

Definition 7: Saddelpunkt

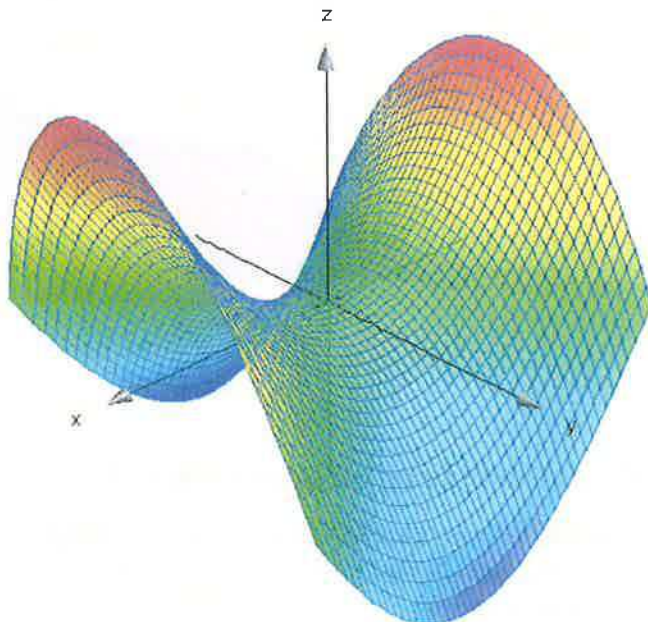
Et saddelpunkt er et stationært punkt, der hverken er et lokalt maksimumpunkt eller et lokalt minimumpunkt.

Eksempel 10: Saddelpunkt

Funktionen

$$f(x, y) = x^2 - y^2,$$

hvis graf ses på figuren til højre, viser tydeligt et saddelpunkt i $(0, 0, 0)$.



Øvelse 21

Tegn grafen for $f(x, y) = x^2 - y^2$ i et værktøjsprogram.

Eksempel 11: Bestemmelse af arten af stationære punkter

Vi vil bestemme eventuelle stationære punkter for funktionen f med forskriften:

$$f(x, y) = \frac{6y}{x^2 + y^2 + 4}$$

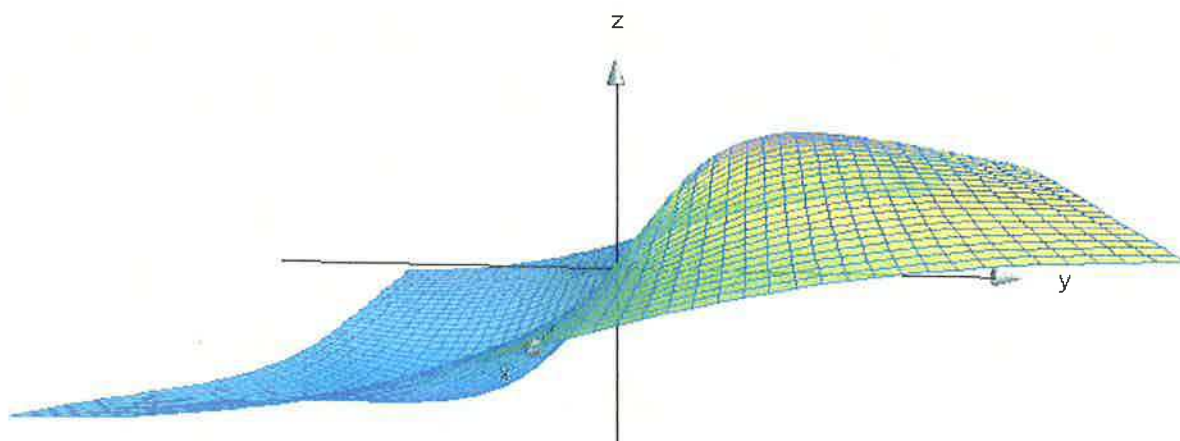
De partielt afledede bestemmes til (ved differentiation af sammensat funktion eller ved brug af et værktøjsprogram):

$$f'_x(x, y) = \frac{-12xy}{(x^2 + y^2 + 4)^2} \quad \text{og} \quad f'_y(x, y) = \frac{6(x^2 - y^2 + 4)}{(x^2 + y^2 + 4)^2}$$

Vi finder nu eventuelle stationære punkter ved at løse $f'_x(x, y) = 0$ og $f'_y(x, y) = 0$. I et værktøjsprogram bestemmes eventuelle stationære punkter ved at løse to ligninger med to ubekendte ved brug af en solve-kommando fx:

$$\text{solve}\left(\frac{-12 \cdot x \cdot y}{(x^2 + y^2 + 4)^2} = 0 \text{ and } \frac{-6 \cdot (y^2 - x^2 - 4)}{(y^2 + x^2 + 4)^2} = 0, x, y\right) \rightarrow x=0 \text{ and } y=-2 \text{ or } x=0 \text{ and } y=2$$

Vi får altså de to stationære punkter: $S_1(0, -2, f(0, -2)) = S_1(0, -2, -1.5)$ og $S_2(0, 2, f(0, 2)) = S_2(0, 2, 1.5)$. Af grafen fremgår det, at der er et lokalt minimum i S_1 og lokalt maksimum i S_2 .

**Dobbeltafledede og blandede afledede**

Det kan indimellem være svært at afgøre om de enkelte stationære punkter er maksimumspunkter, minimumspunkter eller saddelpunkter. De dobbeltafledede kan ligesom for funktioner af en variabel være med til at afgøre dette.

I afsnittet **Ekstrema for funktioner af en variabel** arbejdede vi med den dobbeltafledede af funktioner af én variabel. På samme vis kan vi bestemme dobbeltafledede af funktioner af to variable.

Eksempel 12: Dobbelt afledede funktioner

En funktion f er givet ved

$$f(x, y) = \frac{6y}{x^2 + y^2 + 4}.$$

I eksempel 5 bestemte vi de partielt afledede $f'_x(x, y)$ og $f'_y(x, y)$ for denne funktion til at være:

$$f'_x(x, y) = \frac{-12xy}{(x^2 + y^2 + 4)^2} \quad \text{og} \quad f'_y(x, y) = \frac{-12y^2}{(x^2 + y^2 + 4)^2} + \frac{6}{x^2 + y^2 + 4}$$

Vi differentierer disse to funktioner en gang til og får de dobbelt afledede, hvor vi differentierer mht. samme variabel to gange, eller først mht. den ene variabel og derefter mht. den anden variabel:

Vi differentierer $f'_x(x, y)$ mht. x

$$f''_{xx}(x, y) = \frac{12(3x^2 - y^2 - 4)y}{(x^2 + y^2 + 4)^3}$$

Vi differentierer $f'_x(x, y)$ mht. y

$$f''_{xy}(x, y) = \frac{12(3y^2 - x^2 - 4)x}{(x^2 + y^2 + 4)^3}$$

Vi differentierer $f'_y(x, y)$ mht. x

$$f''_{yx}(x, y) = \frac{12(3y^2 - x^2 - 4)x}{(x^2 + y^2 + 4)^3}$$

Vi differentierer $f'_y(x, y)$ mht. y

$$f''_{yy}(x, y) = \frac{12y(y^2 - 3x^2 - 12)}{(x^2 + y^2 + 4)^3}$$

Øvelse 22

Hvad fortæller eksemplet om de blandede afledede $f''_{xy}(x, y)$ og $f''_{yx}(x, y)$?

Definition 8: De dobbelt afledede og blandede afledede funktioner

Betragt en funktion f af to variable.

De dobbelt afledede er defineret ved: $f''_{xx}(x, y) = (f'_x(x, y))'_x$ og $f''_{yy}(x, y) = (f'_y(x, y))'_y$

De blandede afledede er defineret ved: $f''_{xy}(x, y) = (f'_x(x, y))'_y$ og $f''_{yx}(x, y) = (f'_y(x, y))'_x$

Øvelse 23

Bestem de dobbelt afledede og de blandede afledede fra eksempel 12 ved hjælp af dit værktøjsprogram.

Øvelse 24

En funktion f har forskriften

$$f(x, y) = \frac{6x}{x^2 + y^2 + 3}.$$

Bestem de dobbelt afledede og de blandede afledede.

I de ovenstående eksempler er de blandede afledede er ens. Det fremgår af nedenstående sætning, at dette resultat gælder i de fleste tilfælde.

Sætning 4

Hvis de dobbelt afledede og de blandede afledede af f er kontinuerte, så er $f''_{xy}(x, y) = f''_{yx}(x, y)$.

Denne funktion betegnes normalt f''_{xy} , og den kaldes den blandede afledede af f .

Følgende sætning (som vi ikke beviser) kan benyttes, når vi skal afgøre, om et stationært punkt er et lokalt maksimum, lokalt minimum eller et saddepunkt.

Sætning 5

Lad $P_0(x_0, y_0, z_0)$ være et stationært punkt for funktionen $f(x, y)$, og lad

$$r = f''_{xx}(x_0, y_0) \quad s = f''_{xy}(x_0, y_0) \quad t = f''_{yy}(x_0, y_0)$$

så gælder der, at

- når $rt - s^2 > 0$ og $r > 0$, har f et lokalt minimum i $P_0(x_0, y_0, z_0)$
- når $rt - s^2 > 0$ og $r < 0$, har f et lokalt maksimum i $P_0(x_0, y_0, z_0)$
- når $rt - s^2 < 0$, har f et saddepunkt i $P_0(x_0, y_0, z_0)$
- når $rt - s^2 = 0$, kan vi ikke slutte noget.

Eksempel 13: Arten af stationære punkter

Vi fandt i eksempel 12, at funktionen

$$f(x, y) = \frac{6y}{x^2 + y^2 + 4}$$

har et lokalt minimum i $S_1(0, -2, -1.5)$, og et lokalt maksimum i $S_2(0, 2, 1.5)$.

Vi finder r , s og t for at undersøge, om dette stemmer overens med sætning 5.

$$f'_x(x, y) = \frac{-12xy}{(x^2 + y^2 + 4)^2} \Rightarrow f''_{xx}(x, y) = \frac{12(3x^2 - y^2 - 4)y}{(x^2 + y^2 + 4)^3}$$

$$f'_x(x, y) = \frac{-12xy}{(x^2 + y^2 + 4)^2} \Rightarrow f''_{xy}(x, y) = \frac{12(3y^2 - x^2 - 4)x}{(x^2 + y^2 + 4)^3}$$

$$f'_y(x, y) = \frac{6(x^2 - y^2 + 4)}{(x^2 + y^2 + 4)^2} \Rightarrow f''_{yy}(x, y) = \frac{12y(y^2 - 3x^2 - 12)}{(x^2 + y^2 + 4)^3}$$

De stationære punkters x - og y -koordinater indsættes:

$$r = f''_{xx}(0, 2) = -\frac{3}{8}, \quad s = f''_{xy}(0, 2) = 0, \quad t = f''_{yy}(0, 2) = -\frac{3}{8}$$

Dvs.

$$rt - s^2 = \left(-\frac{3}{8}\right) \cdot \left(-\frac{3}{8}\right) - 0^2 = \frac{9}{64} > 0, \text{ altså er } r = -\frac{3}{8} < 0$$

Heraf kan vi konkludere, at det stationære punkt $S_2(0, 2, 1.5)$ er et lokalt maksimum.

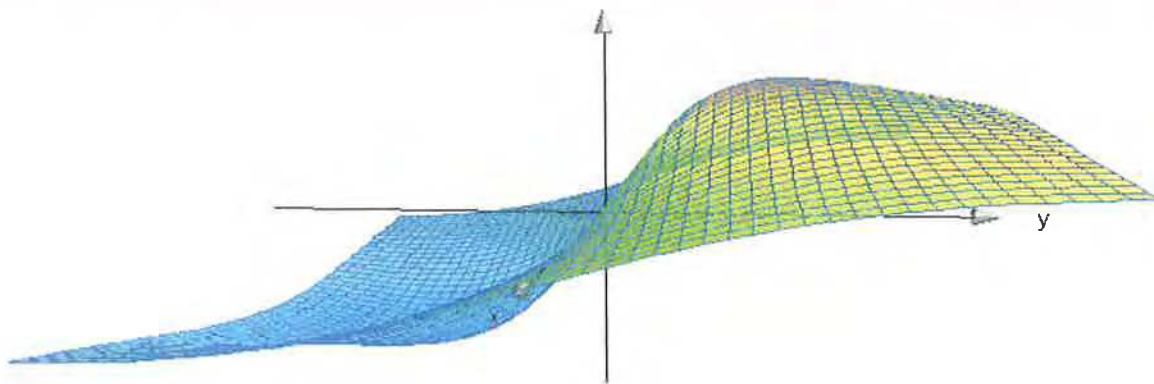
Funktionsværdierne for de dobbelt afledede og den blandede afledede i det andet stationære punkt bestemmes vha. et værktøjsprogram.

$$r = f''_{xx}(0, -2) = \frac{3}{8}, \quad s = f''_{xy}(0, -2) = 0, \quad t = f''_{yy}(0, -2) = \frac{3}{8}$$

Dvs.

$$rt - s^2 = \left(\frac{3}{8}\right) \cdot \left(\frac{3}{8}\right) - 0^2 = \frac{9}{64} > 0, \text{ altså er } r = \left(\frac{3}{8}\right) > 0$$

Heraf kan vi konkludere, at det stationære punkt $S_1(0, -2, -1.5)$ er et lokalt minimum.



Øvelse 25

To funktioner f og g er givet ved

$$f(x, y) = (x^2 + y^2)^2 + 8xy \quad \text{og} \quad g(x, y) = x^3 + y^2 + 5xy.$$

- Bestem de stationære punkter for hver af de to funktioner f og g .
- Bestem arten af de stationære punkter, og tegn graferne for hver af de to funktioner.

Øvelse 26

Funktionen f er givet ved $f(x, y) = \frac{xy}{x^2 + y^4 + 1}$.

- Tegn grafen for funktionen f .
- Bestem de stationære punkter for funktionen f .
- Bestem arten af de stationære punkter.



**MINISTERIET FOR
BØRN OG
UNDERVISNING**
KVALITETS- OG
TILSYNSSTYRELSEN

gl.

Matematik A

Studentereksamen

Opgavesættet er delt i to dele.

Delprøven uden hjælpemidler består af opgave 1-6 med i alt 6 spørgsmål.
Delprøven med hjælpemidler består af opgave 7-16 med i alt 19 spørgsmål.

De 25 spørgsmål indgår med lige vægt i bedømmelsen.

Bedømmelsen af det skriftlige eksamenssæt

I bedømmelsen af besvarelsen af de enkelte spørgsmål og i helhedsindtrykket vil der blive lagt vægt på, om eksaminandens tankegang fremgår klart af besvarelsen. Dette vurderes blandt andet ud fra kravene beskrevet i de følgende fem kategorier:

1. TEKST

Besvarelsen skal indeholde en forbindende tekst fra start til slut, der giver en klar præsentation af, hvad den enkelte opgave og de enkelte delspørgsmål går ud på.

2. NOTATION OG LAYOUT

Der kræves en hensigtsmæssig opstilling af besvarelsen i overensstemmelse med god matematisk skik, herunder en redegørelse for den matematiske notation, der indføres og anvendes, og som ikke kan henføres til standardviden.

3. REDEGØRELSE OG DOKUMENTATION

Besvarelsen skal indeholde en redegørelse for den anvendte fremgangsmåde og dokumentation i form af et passende antal mellemregninger og/eller en matematisk forklaring på brugen af de forskellige faciliteter, som et værktøjsprogram tilbyder.

4. FIGURER

I besvarelsen skal der indgå en hensigtsmæssig brug af figurer og illustrationer, og der skal være en tydelig sammenhæng mellem tekst og figurer.

5. KONKLUSION

Besvarelsen skal indeholde en afrunding af de forskellige spørgsmål med præcise konklusioner, præsenteret i et klart sprog og/eller med brug af almindelig matematisk notation.

Delprøven uden hjælpemidler

Kl. 09.00 – 10.00

Opgave 1 Reducér udtrykket $(p+q)^2 + 2p \cdot (p-q)$.

Opgave 2 Grafen for en lineær funktion $f(x) = ax + b$ går gennem punkterne $A(3,4)$ og $B(5,10)$.

Bestem tallene a og b .

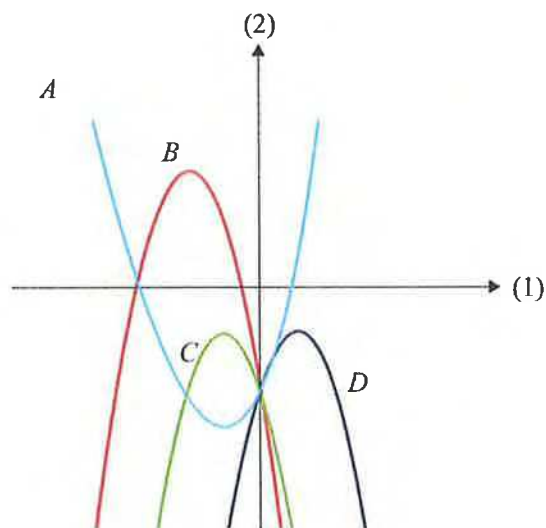
Opgave 3 Om et andengradspolynomium

$$p(x) = ax^2 + bx + c$$

oplyses, at a , c og diskriminanten alle er negative. Endvidere oplyses det, at hældningskoefficienten for parablens tangent i parablens skæringspunkt med andenaksen er positiv.

En af de fire grafer A , B , C og D på figuren er graf for p .

Gør rede for, hvilken af graferne der er graf for p .

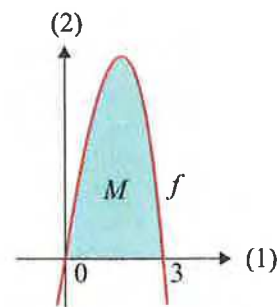


Opgave 4 En funktion f er bestemt ved

$$f(x) = -x^3 + 9x.$$

Grafen for f og koordinatsystemets førsteakse afgrænser i første kvadrant en punktmængde M .

Bestem arealet af M .



Opgave 5 En funktion f er bestemt ved

$$f(x) = e^x + 7x.$$

Gør rede for, at f er en voksende funktion.

Opgave 6 En cirkel har centrum i punktet $(0,0)$ og radius $\sqrt{2}$. Linjen l har parameterfremstillingen

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Opskriv en ligning for cirklen, og bestem koordinatsættet til hvert af skæringspunkterne mellem linjen l og cirklen.

Besvarelsen afleveres kl. 10.00
--

Delprøven med hjælpemidler

Kl. 09.00 – 14.00

Opgave 7



Solarfeld Erlasee bei Arnstein (Kilde: Wikimedia commons)

Tabellen viser udviklingen i den procentdel af Tysklands elektricitetsproduktion, der kommer fra vedvarende energi.

År	1990	1995	2000	2005	2006	2007	2008	2009	2010	2011
Procentdel	3,1	4,5	6,5	10,4	11,8	14,5	15,2	16,6	18,1	20,0

I en model kan sammenhængen beskrives ved

$$P(x) = b \cdot a^x,$$

hvor $P(x)$ er procentdelen af den tyske elektricitetsproduktion, der kommer fra vedvarende energi, og x er antal år efter 1990.

- Benyt tabellens data til at bestemme tallene a og b .
- Gør rede for betydningen af tallet a , og bestem fordoblingstiden.

Tysklands mål er, at i år 2020 skal mindst 35% af landets elektricitetsproduktion komme fra vedvarende energi.

- Benyt modellen til at vurdere om målet er realistisk.

Kilde: *technology review*, July/August 2012.

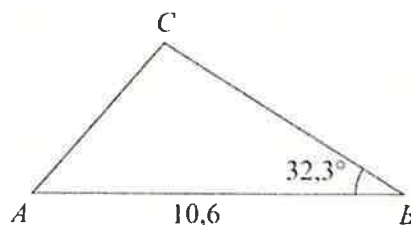
Opgave 8

En funktion f er bestemt ved

$$f(x) = \ln(x) + x^2, \quad x > 0.$$

- Bestem en ligning for tangenten til grafen for f i punktet $P(5, f(5))$.

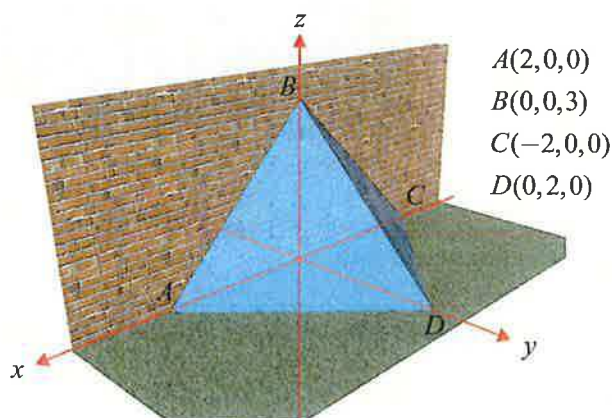
Opgave 9



Om trekant ABC oplyses, at arealet er 22,9 samt at $\angle B = 32,3^\circ$ og $|AB| = 10,6$.

- Bestem højden fra C .
- Bestem omkredsen af trekant ABC .

Opgave 10



Figuren viser en model af et pyramideformet drivhus bygget op ad en mur. Koordinatsættene for drivhusets hjørner er angivet på figuren. Alle mål er i meter.

- Bestem en ligning for den plan, der indeholder glasfladen ABD .

Det oplyses, at den plan, der indeholder glasfladen BCD , har ligningen

$$-3x + 3y + 2z = 6.$$

- Bestem vinklen mellem de to glasflader.

Opgave 11

Ved sommer OL 2012 i London deltog 235 komiteer, og af disse fik 85 en eller flere medaljer. Kvartilsættet for de 85 komitéers medaljefordeling var $(2,4,10)$. Det mindste antal medaljer, der blev uddelt til en komité, var 1, og det højeste antal medaljer, der blev uddelt til en komité, var 104.

- Tegn et boksplot over medaljefordelingen efter komité, og forklar hvad medianen fortæller om medaljefordelingen efter komité.

Kilde: <http://da.wikipedia.org/wiki/>

Opgave 12

Det store pariserhjul "London Eye" har en diameter på 135 m og en tur rundt i en af gondolerne tager en halv time. I en model for bevægelsen af en af gondolerne kan gondolens højde over jordoverfalden som funktion af tiden beskrives ved

$$f(t) = 67,5 \cdot \sin(0,209 \cdot t - 1,57) + 70, \quad 0 \leq t \leq 30,$$

hvor $f(t)$ er gondolens højde over jordoverfladen (målt i meter) til tiden t (målt i minutter efter start).

- Tegn grafen for f , og bestem gondolens højde over jordoverfladen efter 7 minutter.
- Bestem den tid, der går før gondolen første gang befinder sig 40 meter over jordoverfladen.



Foto: commons.wikimedia.org

Opgave 13

I en model betegner N antal traner i en tranebestand i Hokkaido-området i Japan. I modellen antages det, at N som funktion af tiden er en løsning til differential-ligningen

$$\frac{dN}{dt} = 0,00029N \cdot (1500 - N),$$

hvor t er antal år efter 1975.

- Bestem tranebestandens væksthastighed, da der var 500 traner i bestanden.

Det oplyses, at tranebestanden i 1975 var 194 traner.

- Bestem en forskrift for N .
- Bestem det tidspunkt, hvor væksthastigheden for tranebestanden var størst.



Foto: commons.wikimedia.org

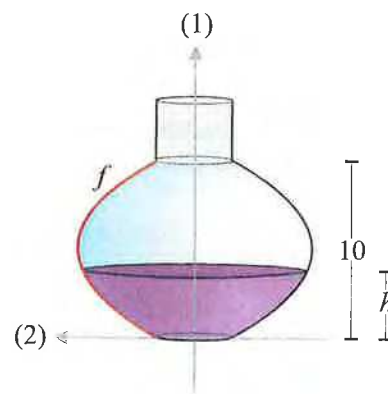
Kilde: *A simple population viability analysis of Tanco (Grus japonensis) in southeastern Hokkaido, Japan, Yoshiyuki Masatomi, Seigo Higashi and Hiroyuki Masatomi, 2007.*

VEND!

Opgave 14 En funktion f er bestemt ved

$$f(x) = -0,2x^2 + 2x + 2,5.$$

I en model af en karaffel har karaflens nedre del form som det omdrejningslegeme, der fremkommer, når grafen for f roteres 360° omkring førsteaksen i intervallet $[0; 10]$ (se figur). Enheden på akserne er cm. Bemærk, at førsteaksen er lodret på figuren.



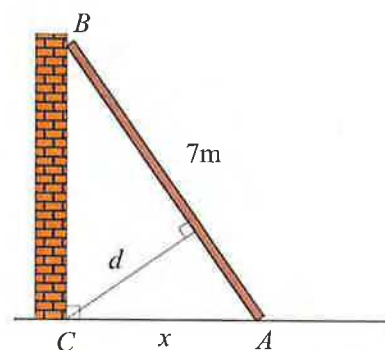
- a) Bestem maksimum for f , og benyt dette til at bestemme bredden af karaflen, der hvor den er bredest.

Der fyldes væske i karaflen, så højden af væsken er h cm fra karaflens bund.

- b) Bestem volumen af væsken udtrykt ved h , og bestem væskehøjden, når der fyldes 500 cm^3 væske i karaflen.

Opgave 15

En 7 m lang stige er placeret op ad en lodret mur. Stigens røringspunkt med jorden benævnes A , og stigens røringspunkt med muren benævnes B . Afstanden mellem stigen og murens fod benævnes d . Afstanden mellem murens fod og stigens fod benævnes med x , og det oplyses, at $0 < x < 7$.



- a) Gør rede for, at $|BC| = \sqrt{49 - x^2}$, og benyt dette til at vise, at $d = \frac{x \cdot \sqrt{49 - x^2}}{7}$.
- b) Bestem x , så d bliver størst mulig.

Opgave 16

En steg sættes til langtidsstegning i en ovn. I en model er stegens indre temperatur T (målt i $^\circ\text{C}$) en funktion af tiden x (målt i minutter). Den hastighed, hvormed stegens indre temperatur stiger til tidspunktet x , er proportional med forskellen mellem ovnens temperatur og stegens indre temperatur. Det oplyses, at ovnens temperatur er 150°C , og at proportionalitetskonstanten er 0,011.



Foto: commons.wikimedia.org

- a) Opstil en differentialligning, som T må opfylde.





MINISTERIET FOR
BØRN OG
UNDERVISNING
KVALITETS- OG
TILSYNSSTYRELSEN

gl.

Matematik B

Studentereksamen

Fredag den 24. maj 2013
kl. 9.00 - 13.00

Opgavesættet er delt i to dele.

Delprøven uden hjælpemidler består af opgave 1-6 med i alt 6 spørgsmål.
Delprøven med hjælpemidler består af opgave 7-12 med i alt 14 spørgsmål.

De 20 spørgsmål indgår med lige vægt i bedømmelsen.

Bedømmelsen af det skriftlige eksamenssæt

I bedømmelsen af besvarelsen af de enkelte spørgsmål og i helhedsindtrykket vil der blive lagt vægt på, om eksaminandens tankegang fremgår klart af besvarelsen. Dette vurderes blandt andet ud fra kravene beskrevet i de følgende fem kategorier:

1. TEKST

Besvarelsen skal indeholde en forbindende tekst fra start til slut, der giver en klar præsentation af, hvad den enkelte opgave og de enkelte delspørgsmål går ud på.

2. NOTATION OG LAYOUT

Der kræves en hensigtsmæssig opstilling af besvarelsen i overensstemmelse med god matematisk skik, herunder en redegørelse for den matematiske notation, der indføres og anvendes, og som ikke kan henføres til standardviden.

3. REDEGØRELSE OG DOKUMENTATION

Besvarelsen skal indeholde en redegørelse for den anvendte fremgangsmåde og dokumentation i form af et passende antal mellemregninger og/eller en matematisk forklaring på brugen af de forskellige faciliteter, som et værktøjsprogram tilbyder.

4. FIGURER

I besvarelsen skal der indgå en hensigtsmæssig brug af figurer og illustrationer, og der skal være en tydelig sammenhæng mellem tekst og figurer.

5. KONKLUSION

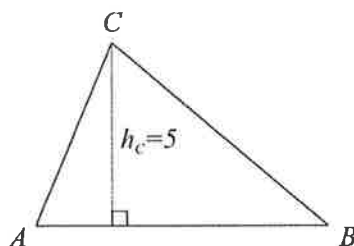
Besvarelsen skal indeholde en afrunding af de forskellige spørgsmål med præcise konklusioner, præsenteret i et klart sprog og/eller med brug af almindelig matematisk notation.

Delprøven uden hjælpemidler

Kl. 09.00 – 10.00

Opgave 1 Tabellen angiver nogle sammenhørende værdier af x og y .

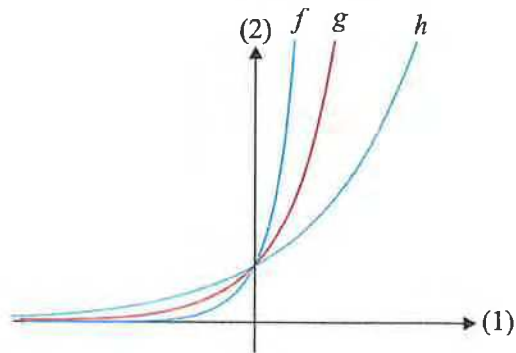
x	2	6
y	5	29

Det oplyses, at $y = a \cdot x + b$.Bestem a .**Opgave 2**Om trekant ABC oplyses, at arealet er 20, og højden fra C er 5.Bestem $|AB|$.**Opgave 3** En parabel er graf for funktionen

$$f(x) = x^2 - 2x - 3.$$

Bestem koordinatsættet til toppunktet for parabelen.

Opgave 4



Figuren viser graferne for tre forskellige eksponentielt voksende funktioner f , g og h .

Hvilken af de tre funktioner har den største fordoblingskonstant?

Opgave 5 En funktion f er givet ved

$$f(x) = -2x^4 + 2x + 5.$$

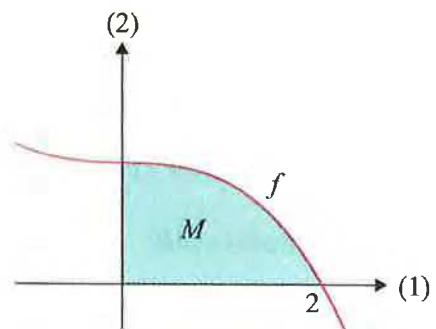
Bestem $f'(x)$.

Opgave 6 En funktion f er bestemt ved

$$f(x) = -x^3 + 8.$$

Grafen for f afgrænser sammen med de to koordinataksler en punktmængde M , som vist på figuren.

Bestem arealet af M .



Besvarelsen afleveres kl. 10.00

Delprøven med hjælpemidler

Kl. 09.00 – 13.00

Opgave 7

Nedenstående tabel viser vejdirektoratets opgørelse over antal trafikdræbte personer i det 1. halvår for hvert af årene 2007-2012.

År	2007	2008	2009	2010	2011	2012
Antal dræbte	195	190	161	110	107	82

I en model antages det, at udviklingen i antal trafikdræbte personer kan beskrives ved en funktion af typen

$$y = ax + b,$$

hvor y betegner antal trafikdræbte personer i det 1. halvår, og x betegner tiden (målt i år efter 2007).

- Benyt tabellens data til at bestemme konstanterne a og b .
- Benyt modellen til at bestemme antal trafikdræbte i det 1. halvår af 2013.
- Bestem det år, hvor antal trafikdræbte i det 1. halvår ifølge modellen er nede på 50 personer.

Kilde: FDM

Opgave 8

I en model kan sammenhængen mellem det antal æg, en skildpadde lægger, og længden af skildpaddens rygskjold beskrives ved

$$f(x) = -0,009425x^2 + 5,857x - 899,9, \quad 280 \leq x \leq 340,$$

hvor $f(x)$ er det antal æg skildpadden lægger, og x er længden af skildpaddens rygskjold (målt i mm).

- Tegn grafen for f , og bestem det antal æg, en skildpadde lægger, når skildpaddens rygskjold er 300 mm langt.
- Bestem rygskjoldets længde for en skildpadde, der lægger 6 æg.

Kilde: Ashton, K.G., R.L. Burke, J.N. Layne. 2007. Geographic variation in body and clutch size of gopher tortoises. *Copeia* 2007: 355-363.

Opgave 9 Ifølge en opgørelse stiger det årlige antal af nye lungekræfttilfælde blandt kvinder i Danmark med 1,3% om året efter 2010. I 2010 var der 2038 nye tilfælde af lungekræft blandt kvinder i Danmark.

- a) Indfør passende variable, og opstil en model, der beskriver udviklingen i det årlige antal nye lungekræfttilfælde blandt kvinder i Danmark.

I en anden model kan udviklingen i det årlige antal nye lungekræfttilfælde blandt mænd i Danmark beskrives ved

$$m(x) = 2244 \cdot 0,99^x,$$

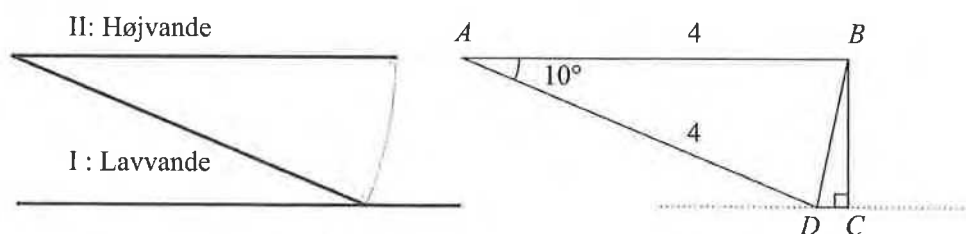
hvor $m(x)$ er det årlige antal nye lungekræfttilfælde til tiden x (målt i antal år efter 2010).

- b) Hvornår er det årlige antal nye lungekræfttilfælde ifølge de to modeller ens for mænd og kvinder?

Opgave 10 En flydebro er forbundet med land via et mellemlid, så flydebroen følger høj- og lavvande.



I en model ligger mellemliddet vandret ved højvande, og forskellen i beliggenheden af mellemliddet ved høj- og lavvande kan skitseres på følgende måde:



Størrelsesforholdene er ikke korrekte

Mellemliddet AB og AD er 4 m langt, og $\angle A$ er 10° .

- a) Bestem $|BD|$.
- b) Bestem højdeforskellen $|BC|$ mellem høj- og lavvande.

Opgave 11 I tabellen ses en opgørelse over aldersfordelingen blandt Folketingets medlemmer i 2011.

Alder	25–30	30–35	35–40	40–45	45–50	50–55	55–60	60–65	65–70
Procentdel	10,3	13,1	14,8	16,6	14,3	6,9	14,3	5,7	4,0

- a) Tegn en sumkurve over aldersfordelingen, og bestem kvartilsættet.
- b) Hvor mange procent af folketingets medlemmer er mellem 57 og 67 år?

Kilde: dst.dk

Opgave 12 En funktion f er givet ved

$$f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x + 30.$$

- a) Bestem monotoniforholdene for f .

Grafen for f har en tangent t_1 med røringspunkt $P(0, f(0))$.

- b) Bestem en ligning for t_1 .

Grafen for f har en anden tangent t_2 med samme hældningskoefficient som t_1 .

- c) Bestem førstekoordinaten til røringspunktet for t_2 .





**MINISTERIET FOR
BØRN OG
UNDERVISNING**
KVALITETS- OG
TILSYNSSTYRELSEN

Matematik A

Studentereksamen

Digital eksamensopgave med adgang til internettet

Opgavesættet er delt i to dele.

Delprøve 1: 2 timer med autoriseret formelsamling

Delprøve 2: 3 timer med alle hjælpemidler

Delprøve 1 består af 12 spørgsmål

Delprøve 2 består af 13 spørgsmål

Alle spørgsmål tillægges hver 10 point

Bedømmelsen af det skriftlige eksamenssæt

I bedømmelsen af besvarelsen af de enkelte spørgsmål og i helhedsindtrykket vil der blive lagt vægt på, om eksaminandens tankegang fremgår klart af besvarelsen. Dette vurderes blandt andet ud fra kravene beskrevet i de følgende fem kategorier:

1. TEKST

Besvarelsen skal indeholde en forbindende tekst fra start til slut, der giver en klar præsentation af, hvad den enkelte opgave og de enkelte delspørgsmål går ud på.

2. NOTATION OG LAYOUT

Der kræves en hensigtsmæssig opstilling af besvarelsen i overensstemmelse med god matematisk skik, herunder en redegørelse for den matematiske notation, der indføres og anvendes, og som ikke kan henføres til standardviden.

3. REDEGØRELSE OG DOKUMENTATION

Besvarelsen skal indeholde en redegørelse for den anvendte fremgangsmåde og dokumentation i form af et passende antal mellemregninger og/eller en matematisk forklaring på brugen af de forskellige faciliteter, som et værktøjsprogram tilbyder.

4. FIGURER

I besvarelsen skal der indgå en hensigtsmæssig brug af figurer og illustrationer, og der skal være en tydelig sammenhæng mellem tekst og figurer.

5. KONKLUSION

Besvarelsen skal indeholde en afrunding af de forskellige spørgsmål med præcise konklusioner, præsenteret i et klart sprog og/eller med brug af almindelig matematisk notation.

Delprøve 1

Kl. 09.00 – 11.00

Opgave 1 I en model for udviklingen i befolkningen på en lille ø oplyses, at antallet af indbyggere aftager med 5% pr. år efter 2013. I 2013 er der 5460 indbyggere på øen.

- a) Opstil et udtryk til beregning af antal indbyggere N på øen som funktion af tiden t (målt i år efter 2013).

Opgave 2 Linjen l går gennem punkterne $A(1,3)$ og $B(4,6)$.

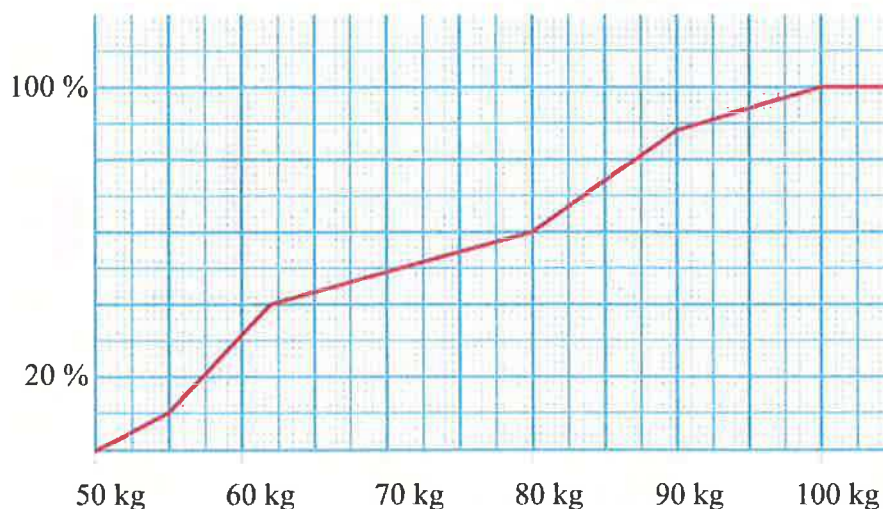
- a) Bestem en parameterfremstilling for l .

Linjen m er givet ved ligningen $y = -x + 8$.

- b) Bestem koordinatsættet til skæringspunktet mellem l og m .

Opgave 3 Figuren viser en sumkurve over vægtfordelingen blandt 500 elever på en skole.

Til opgaven
hører et bilag



- a) Bestem kvartilsættet for vægtfordelingen, og bestem hvor mange elever, der vejer over 80 kg. Benyt evt. vedlagte bilag.

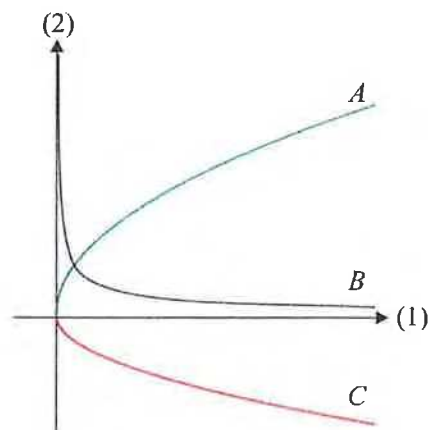
Opgave 4 På figuren ses grafen for hver af de tre funktioner:

$$f(x) = x^{-\frac{1}{2}}$$

$$g(x) = 2x^{\frac{1}{2}}$$

$$h(x) = -x^{\frac{1}{2}}$$

- a) Gør rede for, hvilken af graferne A , B og C der hører til hvilken af de tre funktioner f , g og h .



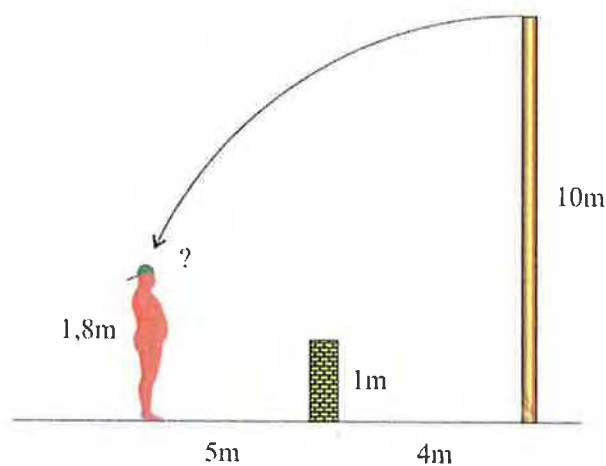
Opgave 5 En funktion f er bestemt ved

$$f(x) = 24 \cdot \ln(x) - x^3, \quad x > 0.$$

- a) Bestem en ligning for tangenten til grafen for f i punktet $P(1, f(1))$.
b) Undersøg, om funktionen har maksimum når $x = 2$.

Opgave 6 En 1,8 m høj mand står 5 m fra en 1 m høj mur. Fra muren er der 4 m til en 10 m høj flagstang, der er fastgjort med et hængsel ved jordoverfladen (se figur). Flagstangen vælter, så den kommer til at hvile på muren.

- a) Bliver manden ramt af flagstangen?



Størrelserne er ikke korrekte

Opgave 7 En funktion f er bestemt ved

$$f(x) = x \cdot e^x - x.$$

- a) Undersøg, om f er en løsning til differentialligningen

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x} + x \cdot e^x.$$

Opgave 8 To funktioner f og g er bestemt ved

$$f(x) = 3x^2$$

$$g(x) = -3x^2 + 24.$$

- a) Bestem førstekoordinaten til hvert af skæringspunkterne mellem grafen for f og grafen for g .

De to grafer afgrænser i første og anden kvadrant en punktmængde M , der har et areal.

- b) Skitsér området M , og bestem arealet af M .

Opgave 9 Et andengradspolynomium P er givet ved

$$P(x) = a \cdot x^2 + b \cdot x + c.$$

Grafen for P er en parabel, der går gennem punkterne $A(0,1)$ og $B(5,36)$. Tangenten til parabelen i punktet A har hældningskoefficienten -3 .

- a) Bestem tallene a , b og c .

Besvarelsen afleveres kl. 11.00
--

Delprøve 2

Kl. 09.00 – 14.00

Opgave 10 Tabellen viser antallet af solgte smartphones på verdensplan i perioden 2008-2011.

Årstal	2008	2009	2010	2011
Antal (i mio.)	151,4	174,2	304,7	491,4

I en model kan udviklingen i antallet af smartphones solgt på verdensplan som funktion af tiden beskrives ved en funktion af typen

$$S(t) = b \cdot a^t,$$

hvor $S(t)$ betegner antallet af solgte smartphones (i mio.) til tidspunktet t (målt i år efter 2008).

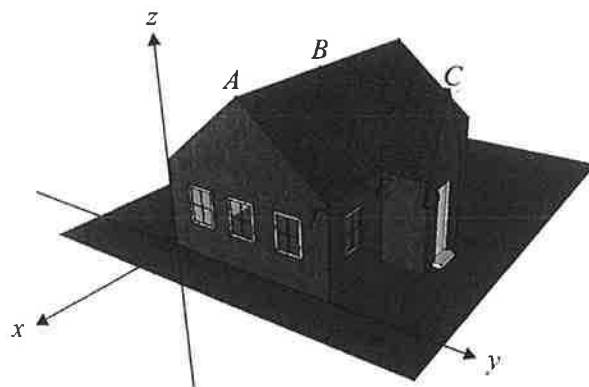
- Bestem a og b .
- Gør rede for, hvad de fundne værdier for konstanterne a og b fortæller om antallet af solgte smartphones på verdensplan i perioden 2008-2011.

Kilde: www.idc.com

Opgave 11 I trekant ABC er $|AB| = 3$, $\angle A = 44^\circ$. Endvidere oplyses, at arealet af trekant ABC er 4.

- Tegn en skitse af situationen, og bestem $|BC|$.

Opgave 12



$$\begin{aligned} A(0.0, 4.0, 7.3) \\ B(-5.3, 4.0, 7.3) \\ C(-5.3, 10.0, 7.3) \\ D(-3.8, 10.0, 4.0) \\ E(-3.8, 8.0, 4.0) \\ F(0.0, 8.0, 4.0) \end{aligned}$$

På figuren ses en model af et hus i et koordinatsystem med enheden meter på alle akser.

- a) Bestem en ligning for den plan α , der indeholder tagfladen $BCDE$.

Det oplyses, at den plan β , der indeholder tagfladen $ABEF$, har ligningen

$$17,49 \cdot y + 21,20 \cdot z - 224,72 = 0.$$

- b) Bestem den spidse vinkel mellem tagfladerne $BCDE$ og $ABEF$.

Opgave 13

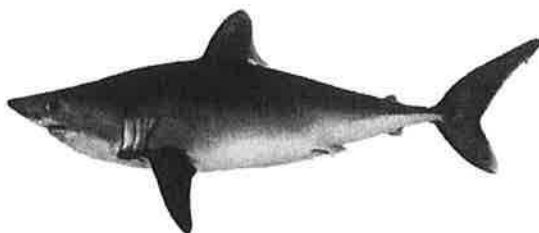


Foto Wikimedia Commons

I en model for vækst af hajer af arten *lamna nasus* er længden af en haj L (målt i cm) som funktion af hajens alder t (målt i år) en løsning til differentialligningen

$$L' = 43,6 - 0,190 \cdot L.$$

- a) Bestem væksthastigheden for en 100 cm lang haj af denne art.

Det oplyses, at en haj af denne art er 58 cm lang ved fødslen.

- b) Bestem en forskrift for $L(t)$, og benyt denne til at bestemme alderen af en 150 cm lang haj af denne art.

Opgave 14

En funktion f af to variable er givet ved

$$f(x, y) = 4x + y^2 + x \cdot y.$$

- a) Bestem gradienten for f i punktet $P(1, 3, f(1, 3))$, og forklar hvad gradienten fortæller om grafens stejlhed i punktet P .

Opgave 15 En funktion f af to variable er givet ved

$$f(x, y) = \frac{1}{3}x^3 + x \cdot y^2 + 2(x^2 - y^2).$$

- Bestem de to stationære punkter for f , og tegn grafen for f .
- Bestem de dobbelte samt den blandede afledede af f og bestem arten af de stationære punkter.

Opgave 16 Et stort butikscenter har 8 indgange, som butikscenteret formoder benyttes lige meget af dets besøgende. Butikscenteret har spurgt 1000 tilfældigt udvalgte besøgende, hvilken af de 8 indgange de er kommet ind ad. Deres svar fordelte sig som vist i tabellen.

Indgang	A	B	C	D	E	F	G	H
Antal besøgende	142	136	109	131	108	105	148	121

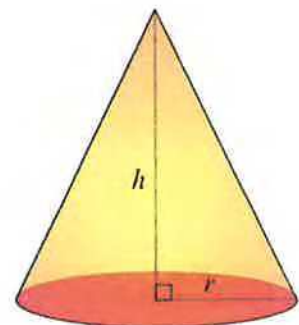
- Opstil en nulhypotese, som butikscenteret kan anvende til at teste om deres formodning holder stik, og beregn de forventede værdier.
- Undersøg på et 5% signifikansniveau, om butikscenteret må forkaste nulhypotesen.

Opgave 17 En beholder skal have form som en kegle. Beholderens cirkulære bund består af et materiale, der koster 2 kr. pr. cm^2 . Keglens krumme overflade består af et materiale, der koster 3 kr. pr. cm^2 . Volumen af keglen er 1000 cm^3 . Radius i keglens bund benævnes r , og keglens højde benævnes h (begge målt i cm).

- Bestem h udtrykt ved r . Gør rede for, at keglens pris P (målt i kr.) som funktion af r kan beskrives ved

$$P(r) = 2\pi \cdot r^2 + 3 \cdot \pi \cdot r \cdot \sqrt{\left(\frac{3000}{\pi \cdot r^2}\right)^2 + r^2},$$

og bestem r , så prisen $P(r)$ bliver mindst mulig, idet $1 < r < 10$.

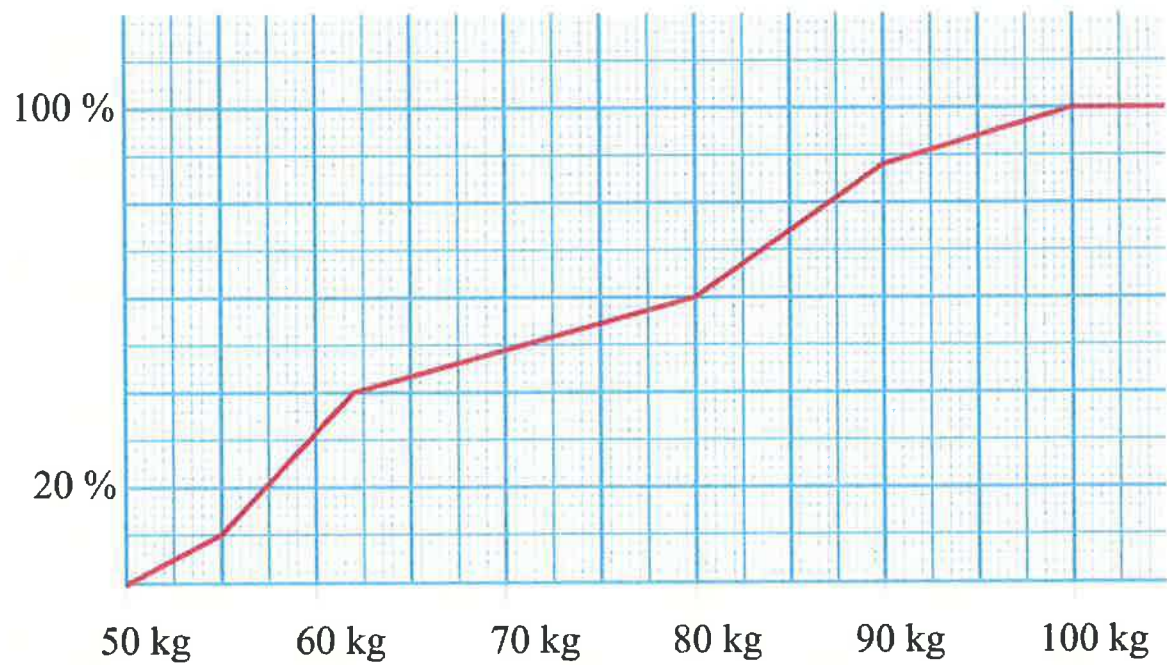


BILAG

Bilaget kan indgå i besvarelsen.

Skole	Hold	ID	
Navn	Ark nr	Antal ark i alt	Tilsynsførende

3





**MINISTERIET FOR
BØRN OG
UNDERVISNING**
KVALITETS- OG
TILSYNSSTYRELSEN

Matematik A

Studentereksamen

Fredag den 24. maj 2013
kl. 9.00 - 14.00

Opgavesættet er delt i to dele.

Delprøven uden hjælpemidler består af opgave 1-6 med i alt 6 spørgsmål.
Delprøven med hjælpemidler består af opgave 7-16 med i alt 19 spørgsmål.

De 25 spørgsmål indgår med lige vægt i bedømmelsen.

Bedømmelsen af det skriftlige eksamenssæt

I bedømmelsen af besvarelsen af de enkelte spørgsmål og i helhedsindtrykket vil der blive lagt vægt på, om eksaminandens tankegang fremgår klart af besvarelsen. Dette vurderes blandt andet ud fra kravene beskrevet i de følgende fem kategorier:

1. TEKST

Besvarelsen skal indeholde en forbindende tekst fra start til slut, der giver en klar præsentation af, hvad den enkelte opgave og de enkelte delspørgsmål går ud på.

2. NOTATION OG LAYOUT

Der kræves en hensigtsmæssig opstilling af besvarelsen i overensstemmelse med god matematisk skik, herunder en redegørelse for den matematiske notation, der indføres og anvendes, og som ikke kan henføres til standardviden.

3. REDEGØRELSE OG DOKUMENTATION

Besvarelsen skal indeholde en redegørelse for den anvendte fremgangsmåde og dokumentation i form af et passende antal mellemregninger og/eller en matematisk forklaring på brugen af de forskellige faciliteter, som et værktøjsprogram tilbyder.

4. FIGURER

I besvarelsen skal der indgå en hensigtsmæssig brug af figurer og illustrationer, og der skal være en tydelig sammenhæng mellem tekst og figurer.

5. KONKLUSION

Besvarelsen skal indeholde en afrunding af de forskellige spørgsmål med præcise konklusioner, præsenteret i et klart sprog og/eller med brug af almindelig matematisk notation.

Delprøven uden hjælpemidler

Kl. 09.00 – 10.00

Opgave 1 Reducér udtrykket $(p+q)^2 + 2p \cdot (p-q)$.

Opgave 2 Grafen for en lineær funktion $f(x) = ax + b$ går gennem punkterne $A(3,4)$ og $B(5,10)$.

Bestem tallene a og b .

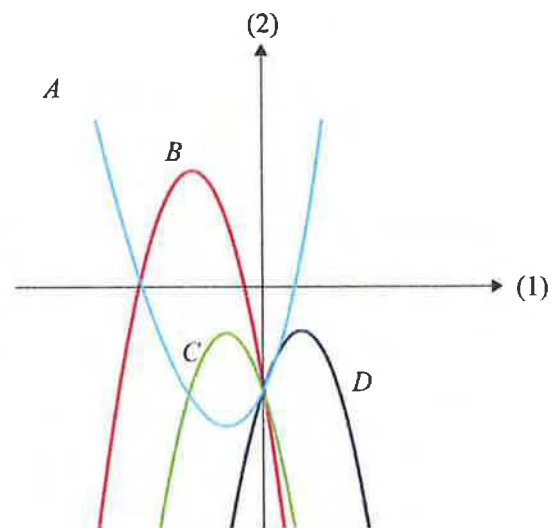
Opgave 3 Om et andengradspolynomium

$$p(x) = ax^2 + bx + c$$

oplyses, at a , c og diskriminanten alle er negative. Endvidere oplyses det, at hældningskoefficienten for parablens tangent i parablens skæringspunkt med andenaksen er positiv.

En af de fire grafer A , B , C og D på figuren er graf for p .

Gør rede for, hvilken af graferne der er graf for p .

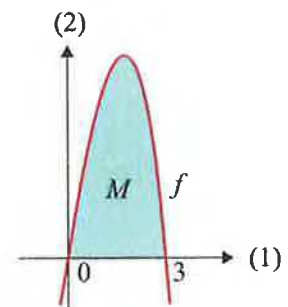


Opgave 4 En funktion f er bestemt ved

$$f(x) = -x^3 + 9x.$$

Grafen for f og koordinatsystemets førsteakse afgrænser i første kvadrant en punktmængde M .

Bestem arealet af M .



Opgave 5 En funktion f er bestemt ved

$$f(x) = e^x + 7x.$$

Gør rede for, at f er en voksende funktion.

Opgave 6 En cirkel har centrum i punktet $(0,0)$ og radius $\sqrt{2}$. Linjen l har parameterfremstillingen

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Opskriv en ligning for cirklen, og bestem koordinatsættet til hvert af skæringspunkterne mellem linjen l og cirklen.

Besvarelsen afleveres kl. 10.00
--

Delprøven med hjælpemidler

Kl. 09.00 – 14.00

Opgave 7



Solarfeld Erlasee bei Arnstein (Kilde: Wikimedia commons)

Tabellen viser udviklingen i den procentdel af Tysklands elektricitetsproduktion, der kommer fra vedvarende energi.

År	1990	1995	2000	2005	2006	2007	2008	2009	2010	2011
Procentdel	3,1	4,5	6,5	10,4	11,8	14,5	15,2	16,6	18,1	20,0

I en model kan sammenhængen beskrives ved

$$P(x) = b \cdot a^x,$$

hvor $P(x)$ er procentdelen af den tyske elektricitetsproduktion, der kommer fra vedvarende energi, og x er antal år efter 1990.

- Benyt tabellens data til at bestemme tallene a og b .
- Gør rede for betydningen af tallet a , og bestem fordoblingstiden.

Tysklands mål er, at i år 2020 skal mindst 35% af landets elektricitetsproduktion komme fra vedvarende energi.

- Benyt modellen til at vurdere om målet er realistisk.

Kilde: *technology review*, July/August 2012.

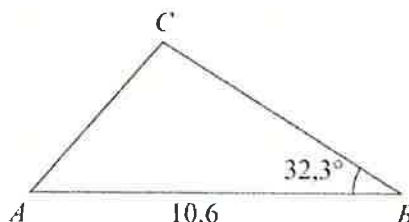
Opgave 8

En funktion f er bestemt ved

$$f(x) = \ln(x) + x^2, \quad x > 0.$$

- Bestem en ligning for tangenten til grafen for f i punktet $P(5, f(5))$.

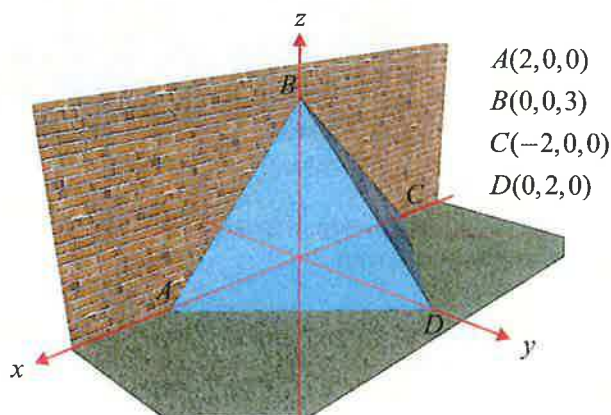
Opgave 9



Om trekant ABC oplyses, at arealet er 22,9 samt at $\angle B = 32,3^\circ$ og $|AB| = 10,6$.

- Bestem højden fra C .
- Bestem omkredsen af trekant ABC .

Opgave 10



Figuren viser en model af et pyramideformet drivhus bygget op ad en mur. Koordinatsættene for drivhusets hjørner er angivet på figuren. Alle mål er i meter.

- Bestem en ligning for den plan, der indeholder glasfladen ABD .

Det oplyses, at den plan, der indeholder glasfladen BCD , har ligningen

$$-3x + 3y + 2z = 6.$$

- Bestem vinklen mellem de to glasflader.

Opgave 11

Et firma producerer en bestemt type slik, der har forskellige farver. Slikket kan have farverne rød, grøn, gul, orange og blå. Firmaet oplyser, at poserne indeholder lige mange af hver farve.

Hans og Grethe har købt en slikpose af den omtalte type, og de fandt følgende farvefordeling:

Rød	Grøn	Gul	Orange	Blå
9	19	15	10	7

- Opstil en nulhypotese, som Hans og Grethe kan anvende til at teste, om firmaets oplysninger om farvefordelingen i deres slikpose holder stik, og undersøg på et 5% signifikansniveau, om Hans og Grethe må forkaste nulhypotesen.

Opgave 12

Det store pariserhjul "London Eye" har en diameter på 135 m og en tur rundt i en af gondolerne tager en halv time. I en model for bevægelsen af en af gondolerne kan gondolens højde over jordoverfladen som funktion af tiden beskrives ved

$$f(t) = 67,5 \cdot \sin(0,209 \cdot t - 1,57) + 70, \quad 0 \leq t \leq 30,$$

hvor $f(t)$ er gondolens højde over jordoverfladen (målt i meter) til tiden t (målt i minutter efter start).

- Tegn grafen for f , og bestem gondolens højde over jordoverfladen efter 7 minutter.
- Bestem den tid, der går før gondolen første gang befinder sig 40 meter over jordoverfladen.



Foto: commons.wikimedia.org

Opgave 13

I en model betegner N antal traner i en tranebestand i Hokkaido-området i Japan. I modellen antages det, at N som funktion af tiden er en løsning til differential-ligningen

$$\frac{dN}{dt} = 0,00029N \cdot (1500 - N),$$

hvor t er antal år efter 1975.

- Bestem tranebestandens væksthastighed, da der var 500 traner i bestanden.

Det oplyses, at tranebestanden i 1975 var 194 traner.

- Bestem en forskrift for N .
- Bestem det tidspunkt, hvor væksthastigheden for tranebestanden var størst.



Foto: commons.wikimedia.org

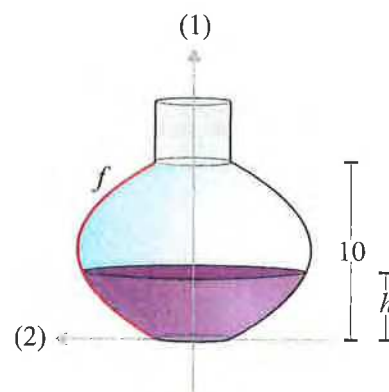
Kilde: *A simple population viability analysis of Tancho (Grus japonensis) in southeastern Hokkaido, Japan, Yoshiyuki Masatomi, Seigo Higashi and Hiroyuki Masatomi, 2007.*

VEND!

Opgave 14 En funktion f er bestemt ved

$$f(x) = -0,2x^2 + 2x + 2,5.$$

I en model af en karaffel har karafflens nedre del form som det omdrejningslegeme, der fremkommer, når grafen for f roteres 360° omkring førsteaksen i intervallet $[0; 10]$ (se figur). Enheden på akserne er cm. Bemærk, at førsteaksen er lodret på figuren.



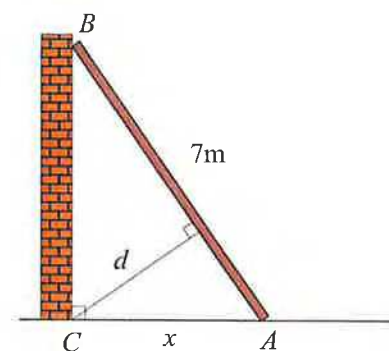
- a) Bestem maksimum for f , og benyt dette til at bestemme bredden af karaffen, der hvor den er bredest.

Der fyldes væske i karaffen, så højden af væsken er h cm fra karafflens bund.

- b) Bestem volumen af væsken udtrykt ved h , og bestem væskehøjden, når der fyldes 500 cm^3 væske i karaffen.

Opgave 15

En 7 m lang stige er placeret op ad en lodret mur. Stigens røringspunkt med jorden benævnes A , og stigens røringspunkt med muren benævnes B . Afstanden mellem stigen og murens fod benævnes d . Afstanden mellem murens fod og stigens fod benævnes med x , og det oplyses, at $0 < x < 7$.



- a) Gør rede for, at $|BC| = \sqrt{49 - x^2}$, og benyt dette til at vise, at $d = \frac{x \cdot \sqrt{49 - x^2}}{7}$.
- b) Bestem x , så d bliver størst mulig.

Opgave 16

En steg sættes til langtidsstegning i en ovn. I en model er stegens indre temperatur T (målt i $^\circ\text{C}$) en funktion af tiden x (målt i minutter). Den hastighed, hvormed stegens indre temperatur stiger til tidspunktet x , er proportional med forskellen mellem ovnens temperatur og stegens indre temperatur. Det oplyses, at ovnens temperatur er 150°C , og at proportionalitetskonstanten er 0,01 l.

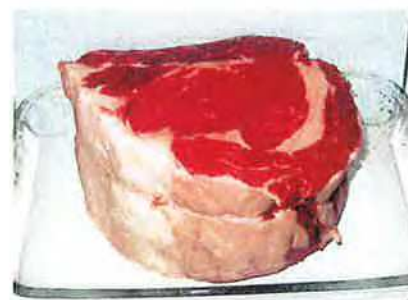


Foto: commons.wikimedia.org

- a) Opstil en differentialligning, som T må opfylde.





**MINISTERIET FOR
BØRN OG
UNDERVISNING**
KVALITETS- OG
TILSYNSSTYRELSEN

Matematik B

Studentereksamen

Opgavesættet er delt i to dele.

Delprøven uden hjælpemidler består af opgave 1-6 med i alt 6 spørgsmål.
Delprøven med hjælpemidler består af opgave 7-12 med i alt 14 spørgsmål.

De 20 spørgsmål indgår med lige vægt i bedømmelsen.

Bedømmelsen af det skriftlige eksamenssæt

I bedømmelsen af besvarelsen af de enkelte spørgsmål og i helhedsindtrykket vil der blive lagt vægt på, om eksaminandens tankegang fremgår klart af besvarelsen. Dette vurderes blandt andet ud fra kravene beskrevet i de følgende fem kategorier:

1. TEKST

Besvarelsen skal indeholde en forbindende tekst fra start til slut, der giver en klar præsentation af, hvad den enkelte opgave og de enkelte delspørgsmål går ud på.

2. NOTATION OG LAYOUT

Der kræves en hensigtsmæssig opstilling af besvarelsen i overensstemmelse med god matematisk skik, herunder en redegørelse for den matematiske notation, der indføres og anvendes, og som ikke kan henføres til standardviden.

3. REDEGØRELSE OG DOKUMENTATION

Besvarelsen skal indeholde en redegørelse for den anvendte fremgangsmåde og dokumentation i form af et passende antal mellemregninger og/eller en matematisk forklaring på brugen af de forskellige faciliteter, som et værktøjsprogram tilbyder.

4. FIGURER

I besvarelsen skal der indgå en hensigtsmæssig brug af figurer og illustrationer, og der skal være en tydelig sammenhæng mellem tekst og figurer.

5. KONKLUSION

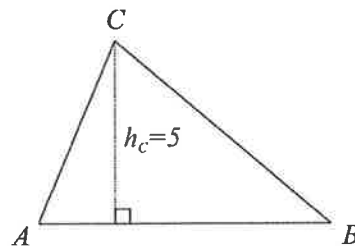
Besvarelsen skal indeholde en afrunding af de forskellige spørgsmål med præcise konklusioner, præsenteret i et klart sprog og/eller med brug af almindelig matematisk notation.

Delprøven uden hjælpemidler

Kl. 09.00 – 10.00

Opgave 1 Tabellen angiver nogle sammenhørende værdier af x og y .

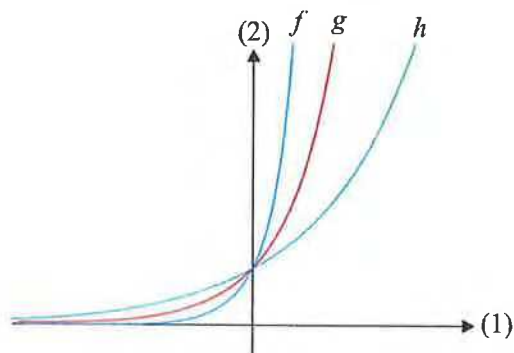
x	2	6
y	5	29

Det oplyses, at $y = a \cdot x + b$.Bestem a .**Opgave 2**Om trekant ABC oplyses, at arealet er 20, og højden fra C er 5.Bestem $|AB|$.**Opgave 3** En parabel er graf for funktionen

$$f(x) = x^2 - 2x - 3.$$

Bestem koordinatsættet til toppunktet for parabelen.

Opgave 4



Figuren viser graferne for tre forskellige eksponentielt voksende funktioner f , g og h .

Hvilken af de tre funktioner har den største fordoblingskonstant?

Opgave 5

En funktion f er givet ved

$$f(x) = -2x^4 + 2x + 5.$$

Bestem $f'(x)$.

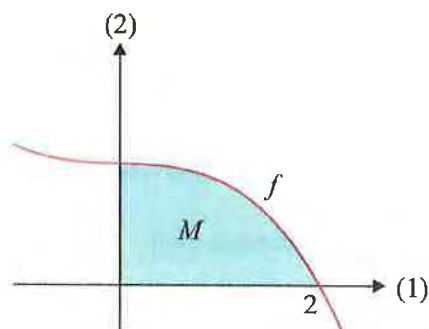
Opgave 6

En funktion f er bestemt ved

$$f(x) = -x^3 + 8.$$

Grafen for f afgrænser sammen med de to koordinataksler en punktmængde M , som vist på figuren.

Bestem arealet af M .



Besvarelsen afleveres kl. 10.00

Delprøven med hjælpemidler

Kl. 09.00 – 13.00

- Opgave 7** Nedenstående tabel viser vejdirektoratets opgørelse over antal trafikdræbte personer i det 1. halvår for hvert af årene 2007-2012.

År	2007	2008	2009	2010	2011	2012
Antal trafikdræbte	195	190	161	110	107	82

I en model antages det, at udviklingen i antal trafikdræbte personer kan beskrives ved en funktion af typen

$$y = ax + b,$$

hvor y betegner antal trafikdræbte personer i det 1. halvår, og x betegner tiden (målt i år efter 2007).

- Benyt tabellens data til at bestemme konstanterne a og b .
- Benyt modellen til at bestemme antal trafikdræbte i det 1. halvår af 2013.
- Bestem det år, hvor antal trafikdræbte i det 1. halvår ifølge modellen er nede på 50 personer.

Kilde: FDM

- Opgave 8** I en model kan sammenhængen mellem det antal æg, en skildpadde lægger, og længden af skildpaddens rygskjold beskrives ved

$$f(x) = -0,009425x^2 + 5,857x - 899,9 \quad , \quad 280 \leq x \leq 340,$$

hvor $f(x)$ er det antal æg skildpadden lægger, og x er længden af skildpaddens rygskjold (målt i mm).

- Tegn grafen for f , og bestem det antal æg, en skildpadde lægger, når skildpaddens rygskjold er 300 mm langt.
- Bestem rygskjoldets længde for en skildpadde, der lægger 6 æg.

Kilde: Ashton, K.G., R.L. Burke, J.N. Layne. 2007. Geographic variation in body and clutch size of gopher tortoises. *Copeia* 2007: 355-363.

Opgave 9 Ifølge en opgørelse stiger det årlige antal af nye lungekræfttilfælde blandt kvinder i Danmark med 1,3% om året efter 2010. I 2010 var der 2038 nye tilfælde af lungekræft blandt kvinder i Danmark.

- a) Indfør passende variable, og opstil en model, der beskriver udviklingen i det årlige antal nye lungekræfttilfælde blandt kvinder i Danmark.

I en anden model kan udviklingen i det årlige antal nye lungekræfttilfælde blandt mænd i Danmark beskrives ved

$$m(x) = 2244 \cdot 0,99^x,$$

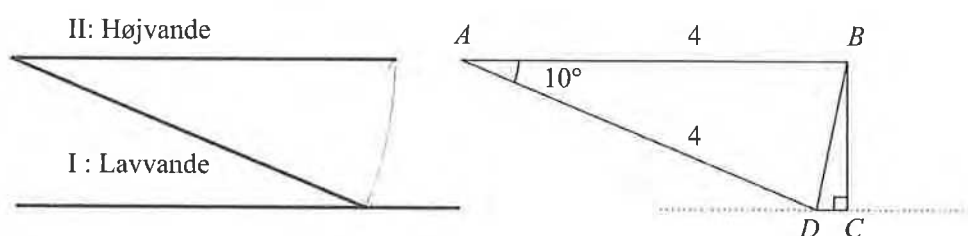
hvor $m(x)$ er det årlige antal nye lungekræfttilfælde til tidspunktet x (målt i antal år efter 2010).

- b) Hvornår er det årlige antal nye lungekræfttilfælde ifølge de to modeller ens for mænd og kvinder?

Opgave 10 En flydebro er forbundet med land via et mellemlid, så flydebroen følger høj- og lavvande.



I en model ligger mellemlidet vandret ved højvande, og forskellen i beliggenheden af mellemlidet ved høj- og lavvande kan skitseres på følgende måde:



Størrelsesforholdene er ikke korrekte

Mellemlidet AB og AD er 4 m langt, og $\angle A$ er 10° .

- a) Bestem $|BD|$.
- b) Bestem højdeforskellen $|BC|$ mellem høj- og lavvande.

Opgave 11

I en undersøgelse har et reklamebureau adspurgt to grupper unge, en fra Jylland og en fra Sjælland, om hvilken af to typer cornflakes A eller B, der smager bedst.

	A er bedst	B er bedst	Ved ikke
Jyder	55	40	30
Sjællændere	75	45	20



Foto: commons.wikimedia.org

Man ønsker at undersøge nulhypotesen:

Der er ikke forskel på unge jyders og unge sjællænderes smag for de to typer cornflakes.

- Bestem de forventede værdier i ovenstående tabel under forudsætning af, at nulhypotesen er sand.
- Undersøg på et 5% signifikansniveau, om nulhypotesen kan forkastes.

Opgave 12

En funktion f er givet ved

$$f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x + 30.$$

- Bestem monotoniforholdene for f .

Grafen for f har en tangent t_1 med røringspunkt $P(0, f(0))$.

- Bestem en ligning for t_1 .

Grafen for f har en anden tangent t_2 med samme hældningskoefficient som t_1 .

- Bestem førstekoordinaten til røringspunktet for t_2 .





MINISTERIET FOR
BØRN OG
UNDERVISNING
KVALITETS- OG
TILSYNSSTYRELSEN

gl.

Matematik A

Studentereksamen

Opgavesættet er delt i to dele.

Delprøven uden hjælpemidler består af opgave 1-6 med i alt 6 spørgsmål.
Delprøven med hjælpemidler består af opgave 7-15 med i alt 19 spørgsmål.

De 25 spørgsmål indgår med lige vægt i bedømmelsen.

Bedømmelsen af det skriftlige eksamenssæt

I bedømmelsen af besvarelsen af de enkelte spørgsmål og i helhedsindtrykket vil der blive lagt vægt på, om eksaminandens tankegang fremgår klart af besvarelsen. Dette vurderes blandt andet ud fra kravene beskrevet i de følgende fem kategorier:

1. TEKST

Besvarelsen skal indeholde en forbindende tekst fra start til slut, der giver en klar præsentation af, hvad den enkelte opgave og de enkelte delspørgsmål går ud på.

2. NOTATION OG LAYOUT

Der kræves en hensigtsmæssig opstilling af besvarelsen i overensstemmelse med god matematisk skik, herunder en redegørelse for den matematiske notation, der indføres og anvendes, og som ikke kan henføres til standardviden.

3. REDEGØRELSE OG DOKUMENTATION

Besvarelsen skal indeholde en redegørelse for den anvendte fremgangsmåde og dokumentation i form af et passende antal mellemregninger og/eller en matematisk forklaring på brugen af de forskellige faciliteter, som et værktøjsprogram tilbyder.

4. FIGURER

I besvarelsen skal der indgå en hensigtsmæssig brug af figurer og illustrationer, og der skal være en tydelig sammenhæng mellem tekst og figurer.

5. KONKLUSION

Besvarelsen skal indeholde en afrunding af de forskellige spørgsmål med præcise konklusioner, præsenteret i et klart sprog og/eller med brug af almindelig matematisk notation.

Delprøven uden hjælpemidler

Kl. 09.00 – 10.00

Opgave 1 En parabel er graf for en funktion med forskriften $f(x) = 2x^2 - 8x + 15$.

Bestem koordinatsættet til parablens toppunkt.

Opgave 2 I en model kan udviklingen i antallet af rådyr i et bestemt område i Danmark beskrives ved funktionen

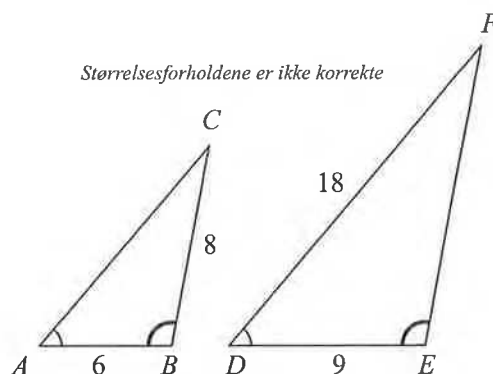
$$N(t) = 25000 \cdot 1.03^t,$$

hvor $N(t)$ beskriver antallet af rådyr til tidspunktet t (målt i år efter år 2000).

Gør rede for betydningen af tallene i forskriften for $N(t)$.

Opgave 3 På figuren ses to ensvinklede trekanter ABC og DEF . Nogle af sidelængderne er angivet på figuren.

Bestem omkredsen af trekant ABC .



Opgave 4 En funktion f er bestemt ved

$$f(x) = 6x^2 + 3.$$

Bestem en forskrift for den stamfunktion til f , hvis graf går gennem punktet $P(2,10)$.

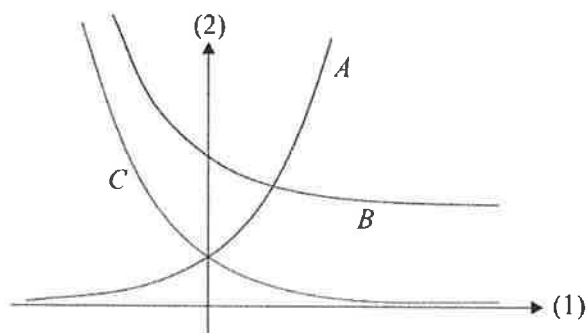
Opgave 5

Hver af de tre grafer A , B og C på figuren er graf for en af de tre funktioner f , g og h . De tre funktioner er bestemt ved

$$f(x) = 0,5^x$$

$$g(x) = 2^x$$

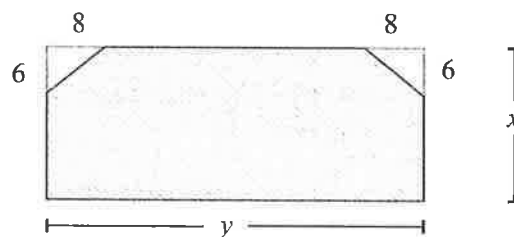
$$h(x) = 0,5^x + 2$$



Gør for hver af graferne A , B og C rede for, hvilken af de tre funktioner den er graf for.

Opgave 6

På figuren ses et rektangel med sidelængder x og y , hvorfra der er afskåret to retvinklede trekanter med sidelængder 6 og 8. Den tiloversblevne skraverede figur har omkredsen 200.



Bestem x og y , så figurens areal bliver størst muligt.

Besvarelsen afleveres kl. 10.00

Delprøven med hjælpemidler

Kl. 09.00 – 14.00

Opgave 7 I et koordinatsystem i planen er givet to punkter $A(20,5)$ og $B(5,10)$ samt en vektor $\vec{a} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

- Bestem arealet af parallelogrammet udspændt af $\overrightarrow{AB}$ og $\vec{a}$.
- Bestem koordinatsættet til projektionen af $\overrightarrow{AB}$ på $\vec{a}$.

Opgave 8



For et bestemt fragtskib har man målt sammenhørende værdier af motoreffekt og fart.

Motoreffekt (kW)	1537	2003	2637	3489	4537	5755	7606
Fart (knot)	10	11	12	13	14	15	16

I en model kan sammenhængen beskrives ved en funktion af typen

$$f(x) = b \cdot x^a,$$

hvor $f(x)$ er farten (målt i knob) ved en motoreffekt på x (målt i kW).

- Benyt tabellens data til at bestemme konstanterne a og b .
- Hvor hurtigt sejler skibet, når motoreffekten er 8000 kW?
- Hvor mange procent øges farten, når motoreffekten øges med 30%?

Opgave 9 En funktion f er bestemt ved

$$f(x) = x^3 + 6x^2 + 9x.$$

- a) Tegn grafen for f , og bestem funktionens nulpunkter.
- b) Bestem monotoniforholdene for f .

En anden funktion g er bestemt ved

$$g(x) = -x^2 + bx + c,$$

hvor b og c er konstanter. Det oplyses, at graferne for f og g har en fælles tangent t i punktet $P(1, f(1))$.

- c) Bestem en ligning for tangenten t , og bestem konstanterne b og c .

Opgave 10 Den væksthastighed, hvormed salmonellabakterier udvikler sig i råt kød, afhænger af den temperatur, som kødet opbevares ved. I en model kan væksthastigheden for salmonellabakterier som funktion af temperaturen beskrives ved funktionen

$$r(t) = 7,18 \cdot 10^{-4} \cdot (t - 0,93)^2 \cdot (1 - e^{0,464(t-46,96)}), \quad 0 \leq t \leq 47,$$

hvor $r(t)$ betegner væksthastigheden af salmonellabakterier (målt i CFU/g pr. time), og t betegner temperaturen (målt i $^{\circ}\text{C}$).

- a) Bestem den temperatur, hvor væksthastigheden for salmonellabakterier er størst.

Kilde: Juneja et al., "Mathematical Modeling of Growth of Salmonella in Raw Ground Beef under Isothermal Conditions from 10 to 45 $^{\circ}\text{C}$ ", *Biological Systems Engineering: Papers and Publications*, Paper 37. 2009.

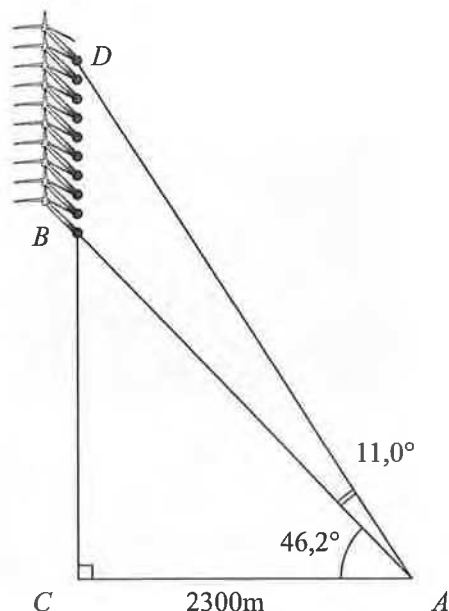
Opgave 11



set fra punkt C



set fra punkt A



Ovenfor ses to fotos samt en model af en vindmøllepark med ti møller set fra to forskellige steder på land, nemlig fra punktet A og punktet C . Afstanden mellem de to punkter er 2300 meter. Sigtevinklerne fra punktet A til den nærmeste mølle i punktet B og til den fjerneste mølle i punktet D er målt og angivet på figuren.

- a) Bestem, hvor langt den nærmeste mølle er fra land, og bestem møllernes indbyrdes afstand.

Opgave 12

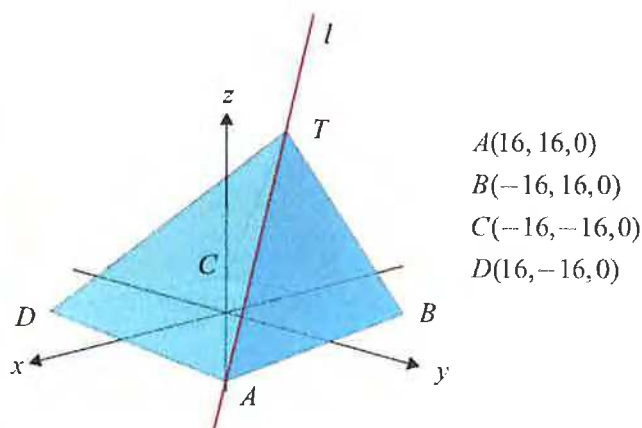
Gruppen af ældre kvinder i Danmark inddeles efter alder i seks grupper, og i 2001 var fordelingen

Alder	65–70	70–75	75–80	80–85	85–90	90–95
Procentdel	26%	23%	21%	16%	9,4%	4,6%

- a) Tegn en sumkurve, og bestem kvartilsættet for fordelingen af ældre kvinder i Danmark i 2001.

Kilde: Danmarks Statistik

Opgave 13



På figuren ses en skæv glasperamide indtegnet i et koordinatsystem med enheden dm på akserne. Glasperamidens bund er kvadratisk, og koordinatsættene for hjørnepunkterne er angivet på figuren. Pyramidens højeste punkt betegnes T . Linjen l , der går gennem punktet A og punktet T , har parameterfremstillingen

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 16 \\ 16 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -27 \\ -16 \\ 23 \end{pmatrix}, \text{ hvor } s \in \mathbb{R}.$$

- a) Bestem en ligning for den plan α , der indeholder glasperamidens sideflade ATB .

Den plan β , der indeholder sidefladen BCT , har ligningen

$$23x - 5z + 368 = 0.$$

- b) Bestem koordinatsættet til T , som er skæringspunktet mellem l og β .
- c) Bestem den stumpe vinkel mellem α og β .

Opgave 14

En funktion f er givet ved

$$f(x) = e^{-0,1x} \cdot \sin(\pi \cdot x), \quad x \geq 0.$$

Funktionen f har i intervallet $[0; 3]$ to x -værdier x_1 og x_2 , hvori der er lokale maksima.

- a) Tegn grafen for f , og bestem koordinatsættene til hvert af punkterne $A(x_1, f(x_1))$ og $B(x_2, f(x_2))$.
- b) Bestem en forskrift for den eksponentialfunktion $g(x) = b \cdot a^x$, hvis graf går gennem A og B .

Graferne for de to funktioner f og g afgrænser i intervallet $[x_1; x_2]$ et område M , der har et areal.

- c) Bestem arealet af M .

Opgave 15

I en model for en bestemt kemisk reaktion omdannes et stof A . Mængden af stoffet A som funktion af tiden er en løsning til differentialligningen:

$$\frac{dM}{dt} = -k \cdot M^2,$$

hvor k er en konstant, og M er mængden (målt i mg) af stoffet A til tidspunktet t (målt i minutter). Til tidspunktet $t = 0$ er der 70 mg af stoffet A , og til tidspunktet $t = 60$ er der 20 mg tilbage af stoffet A .

- a) Bestem en forskrift for $M(t)$, og bestem konstanten k .
- b) Bestem $M'(60)$, og gør rede for betydningen af dette tal.



MINISTERIET FOR
BØRN OG
UNDERVISNING
KVALITETS- OG
TILSYNSSTYRELSEN

gl.

Matematik B

Studentereksamen

Opgavesættet er delt i to dele.

Delprøven uden hjælpemidler består af opgave 1-6 med i alt 6 spørgsmål.
Delprøven med hjælpemidler består af opgave 7-12 med i alt 14 spørgsmål.

De 20 spørgsmål indgår med lige vægt i bedømmelsen.

Bedømmelsen af det skriftlige eksamenssæt

I bedømmelsen af besvarelsen af de enkelte spørgsmål og i helhedsindtrykket vil der blive lagt vægt på, om eksaminandens tankegang fremgår klart af besvarelsen. Dette vurderes blandt andet ud fra kravene beskrevet i de følgende fem kategorier:

1. TEKST

Besvarelsen skal indeholde en forbindende tekst fra start til slut, der giver en klar præsentation af, hvad den enkelte opgave og de enkelte delspørgsmål går ud på.

2. NOTATION OG LAYOUT

Der kræves en hensigtsmæssig opstilling af besvarelsen i overensstemmelse med god matematisk skik, herunder en redegørelse for den matematiske notation, der indføres og anvendes, og som ikke kan henføres til standardviden.

3. REDEGØRELSE OG DOKUMENTATION

Besvarelsen skal indeholde en redegørelse for den anvendte fremgangsmåde og dokumentation i form af et passende antal mellemregninger og/eller en matematisk forklaring på brugen af de forskellige faciliteter, som et værktøjsprogram tilbyder.

4. FIGURER

I besvarelsen skal der indgå en hensigtsmæssig brug af figurer og illustrationer, og der skal være en tydelig sammenhæng mellem tekst og figurer.

5. KONKLUSION

Besvarelsen skal indeholde en afrunding af de forskellige spørgsmål med præcise konklusioner, præsenteret i et klart sprog og/eller med brug af almindelig matematisk notation.

Delprøven uden hjælpemidler

Kl. 09.00 – 10.00

Opgave 1 En funktion f er bestemt ved

$$f(x) = 4 \cdot 5^x.$$

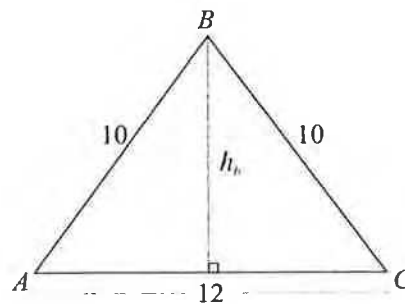
Tabellen viser nogle støttepunkter for grafen til f .

x	0	1	2
$f(x)$	4	20	

Udfyld resten af tabellen.

Opgave 2 Isolér y i ligningen

$$-15x + 5y - 45 = 0.$$

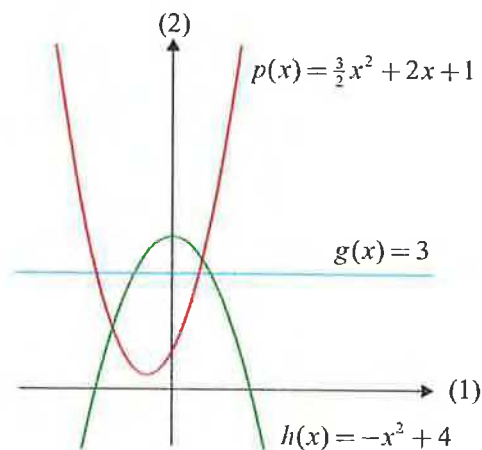
Opgave 3 I den ligebenede trekant ABC er siderne AB og BC lige lange. Nogle af målene for trekant ABC er angivet på figuren.Bestem højden h_b fra B .**Opgave 4** Løs andengradsligningen

$$2x^2 - 8 = 0.$$

Opgave 5 En funktion f er bestemt ved

$$f(x) = 3x + 2.$$

På figuren ses graferne for de tre funktioner g , h og p .



Argumentér for, hvilken af de tre funktioner der er en stamfunktion til f .

Opgave 6 En funktionen f er bestemt ved

$$f(x) = 4e^x + 1.$$

Bestem en ligning for tangenten til grafen for f i punktet $P(0, f(0))$.

Besvarelsen afleveres kl. 10.00

Delprøven med hjælpemidler

Kl. 09.00 – 13.00

Opgave 7



Foto: commons.wikimedia.org

Tabellen nedenfor viser nogle sammenhørende værdier af den gennemsnitlige kuldørrelse og antal ynglende sangspurvepar pr. acre for arten *Melospiza melodia*.

Antal ynglende sangspurvepar pr. acre	5	18	29	46	55	57	66	72
Gennemsnitlig kuldørrelse	3,8	3,6	3,5	3,4	3,2	3,3	3,2	3,1

I en model er sammenhængen givet ved

$$y = ax + b,$$

hvor y er den gennemsnitlige kuldørrelse, og x er antal ynglende sangspurvepar pr. acre.

- Benyt tabellens data til at bestemme tallene a og b .
- Benyt modellen til at bestemme antal ynglende sangspurvepar pr. acre, når den gennemsnitlige kuldørrelse er nede på 3,0.

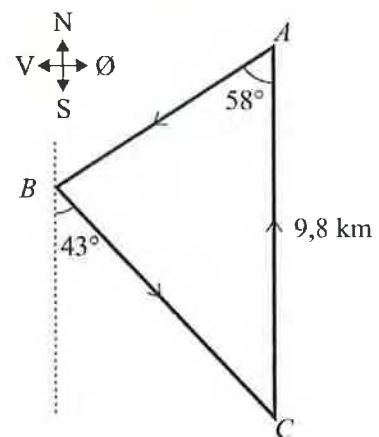
Opgave 8

Et racerbådsløb afvikles på en bane, som vist på figuren. Løbet starter ved A , hvor bådene sejler i retningen syd 58° vest til B , derefter i retningen syd 43° øst til C , hvorefter de sejler i retningen stik nord tilbage til A . Denne sidste strækning fra C til A er 9,8 km lang.

- Argumentér for, at vinkel C i trekant ABC er 43° , og bestem afstanden fra B til C .

Under racerbådsløbet er et område svarende til trekant ABC afspærret.

- Hvor stort et areal er afspærret under racerbådsløbet?



Opgave 9



Foto: Wikimedia Commons

”Danskerne sviner mere end nogensinde

I 1994 blev der i Danmark produceret 11.105.000 ton affald. I 2004 var tallet steget til 13.359.000 ton affald. Og tallet er steget yderligere frem til i dag.”

I det følgende antages det, at udviklingen i affaldsproduktionen i Danmark vokser eksponentielt i perioden 1994-2004.

- Vis, at den gennemsnitlige årlige procentvise stigning i affaldsproduktionen i Danmark i perioden 1994-2004 var 1,865% .
- Indfør passende variable, og opstil med udgangspunkt i den gennemsnitlige årlige procentvise stigning en model, der beskriver udviklingen i affaldsproduktionen i Danmark i perioden 1994-2004.
- Benyt modellen til at bestemme, hvor lang tid der går, før affaldsproduktionen i Danmark er fordoblet.

Kilde: Affaldsstatistik 2009 og Fremskrivning af affaldsmængder 2011-2050, Orientering fra Miljøstyrelsen Nr. 4 2011.

Opgave 10

I Indien har man udviklet en regional model, der beskriver sammenhængen mellem kropstemperaturen og den tid, der er gået, siden personen er død. Modellen er givet ved

$$f(x) = 1097,9 - 35,8309x + 0,398778x^2 - 0,00150341x^3, \quad 88 \leq x \leq 99,$$

hvor $f(x)$ betegner tiden efter personen er død (målt i timer), og x betegner kropstemperaturen (målt i °F).

- Tegn grafen for f , og bestem den tid, der er gået, siden personen er død, når kropstemperaturen er 90 °F.
- Bestem kropstemperaturen for en person 2 timer efter personens død.

Kilde: Polynomial regression model to estimate time since death in adults from rectal temperature in Chandigarh zone of Northwest India, Dr. Dalbir Singh et al, 2005.

Opgave 11

Et firma sælger en ydelse, der består i at holde øje med trafikken på deres kunders websites. Firmaet tilbyder sine kunder et specielt statistikmodul, som bl.a. viser, hvor lang tid en besøgende har brugt på kundens website. Tabellen viser firmaets besøgstidsstatistik for en bestemt kundes website.

Besøgstid (sekunder)	0–30	30–60	60–90	90–120	120–150	150–180	180–210	210–240	240–270
Antal besøgende	810	426	201	326	278	267	103	129	56

- Tegn en sumkurve over besøgstiderne, og bestem kvartilsættet.
- Hvor mange af de besøgende brugte mellem 100 og 160 sekunder på websitet?

Opgave 12

En funktion f er givet ved

$$f(x) = 8 \cdot x^{-1} + \frac{1}{2}x - 3, \quad x > 0.$$

- Løs ligningen $f'(x) = 0$, og bestem monotoniforholdene for f .

En funktion g er givet ved

$$g(x) = -\frac{1}{2}x + 6.$$

- Tegn graferne for f og g i samme koordinatsystem, og bestem førstekoordinaten til hvert af de to skæringspunkter mellem de to grafer i 1. kvadrant.

De to grafer afgrænser i 1. kvadrant en punktmængde M , der har et areal.

- Bestem arealet af M .





**MINISTERIET FOR
BØRN OG
UNDERVISNING**
KVALITETS- OG
TILSYNSSTYRELSEN

Matematik A

Studentereksamen

Digital eksamensopgave med adgang til internettet

Opgavesættet er delt i to dele.

Delprøve 1: 2 timer med autoriseret formelsamling

Delprøve 2: 3 timer med alle hjælpemidler

Delprøve 1 består af 12 spørgsmål

Delprøve 2 består af 13 spørgsmål

Alle spørgsmål tillægges hver 10 point

Bedømmelsen af det skriftlige eksamenssæt

I bedømmelsen af besvarelsen af de enkelte spørgsmål og i helhedsindtrykket vil der blive lagt vægt på, om eksaminandens tankegang fremgår klart af besvarelsen. Dette vurderes blandt andet ud fra kravene beskrevet i de følgende fem kategorier:

1. TEKST

Besvarelsen skal indeholde en forbindende tekst fra start til slut, der giver en klar præsentation af, hvad den enkelte opgave og de enkelte delspørgsmål går ud på.

2. NOTATION OG LAYOUT

Der kræves en hensigtsmæssig opstilling af besvarelsen i overensstemmelse med god matematisk skik, herunder en redegørelse for den matematiske notation, der indføres og anvendes, og som ikke kan henføres til standardviden.

3. REDEGØRELSE OG DOKUMENTATION

Besvarelsen skal indeholde en redegørelse for den anvendte fremgangsmåde og dokumentation i form af et passende antal mellemregninger og/eller en matematisk forklaring på brugen af de forskellige faciliteter, som et værktøjsprogram tilbyder.

4. FIGURER

I besvarelsen skal der indgå en hensigtsmæssig brug af figurer og illustrationer, og der skal være en tydelig sammenhæng mellem tekst og figurer.

5. KONKLUSION

Besvarelsen skal indeholde en afrunding af de forskellige spørgsmål med præcise konklusioner, præsenteret i et klart sprog og/eller med brug af almindelig matematisk notation.

Delprøve 1

Kl. 09.00 – 11.00

Opgave 1 En parabel er graf for andengradspolynomiet p , der har forskriften

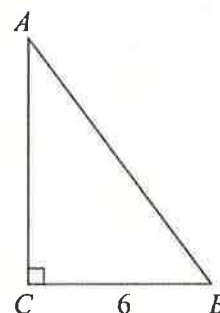
$$p(x) = 2x^2 - 8x + 5.$$

a) Bestem koordinatsættet til toppunktet for parabelen.

Opgave 2

I en retvinklet trekant ABC er $|BC| = 6$. Det oplyses, at arealet af trekant ABC er 24.

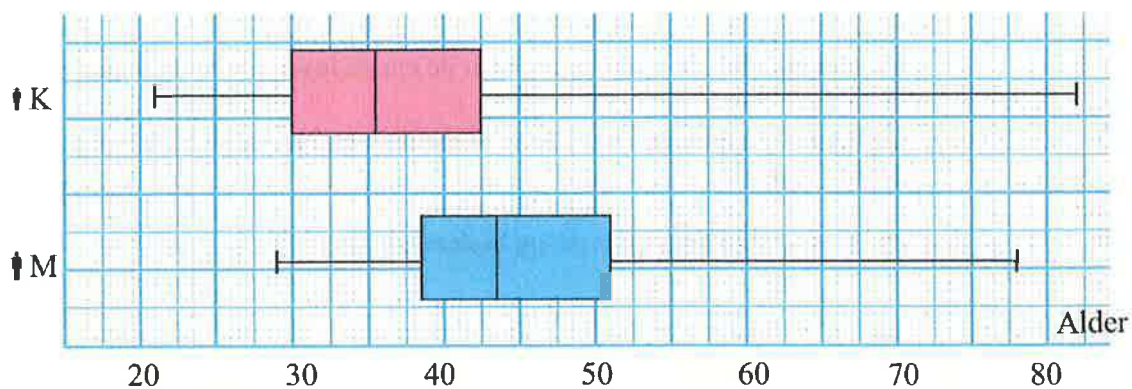
a) Bestem $|AC|$ og $|AB|$.



Opgave 3

På figuren ses to boksplot over aldersfordelingen blandt Oscar-vindere i kategorien "Bedste skuespiller" fordelt på køn i perioden 1970-2012.

Til opgaven
hører et bilag



a) Bestem kvartilsættet for de to køns aldersfordelinger, og benyt disse til at sammenligne aldersfordelingen for Oscar-vindere i kategorien "Bedste skuespiller" fordelt på køn. Benyt evt. vedlagte bilag.

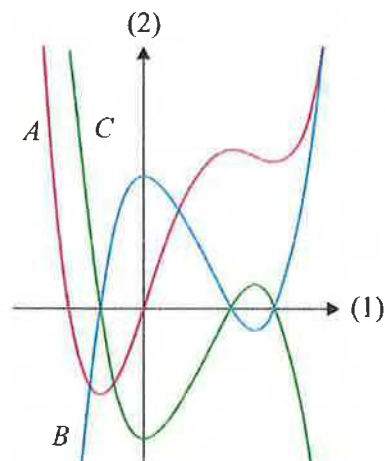
Opgave 4 To vektorer $\vec{a}$ og $\vec{b}$ er givet ved

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 8 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ og } \vec{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

- Bestem arealet af det parallellogram, som de to vektorer udspænder.
- Bestem koordinatsættet til projektionen af $\vec{b}$ på $\vec{a}$.

Opgave 5 På figuren ses graferne for tre funktioner. Det oplyses, at en af graferne er graf for funktionen f , og en anden er graf for f' .

- Gør rede for, hvilken af graferne A , B og C der er graf for f , og hvilken der er graf for f' .



Opgave 6 En funktion f har forskriften

$$f(x) = -x^3 + 3x^2.$$

- Bestem monotoniforholdene for f .
- Gør rede for, at $x = 0$ og $x = 3$ er de eneste løsninger til ligningen $f(x) = 0$.

Grafen for f afgrænser sammen med førsteaksen i første kvadrant en punktmængde M , der har et areal.

- Skitsér punktmængden M , og bestem arealet af M .

Opgave 7 En funktion er givet ved

$$f(x) = 2x + 1 + e^x.$$

- Bestem den stamfunktion til f , hvis graf går gennem punktet $P(0,3)$.

Opgave 8

Det oplyses, at funktionen f er en løsning til differentiaalligningen

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2y + 4x^2}{x}.$$

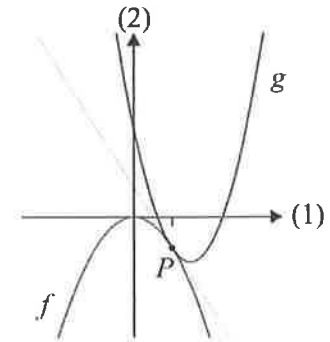
- a) Bestem en ligning for tangenten til grafen for f i punktet $P(1, 4)$.

Opgave 9

To andengradspolynomier f og g er givet ved

$$\begin{aligned} f(x) &= -x^2 \\ g(x) &= 2x^2 + bx + c. \end{aligned}$$

Graferne for de to funktioner har en fælles tangent i punktet $P(1, f(1))$.



- a) Bestem tallene b og c .

Besvarelsen afleveres kl. 11.00

Delprøve 2

Kl. 09.00 – 14.00

Opgave 10



Ud fra pollenforøgelsen i sedimentet på bunden af nogle søer kan man give et overslag over udbredelsen af fyrretræer på de britiske øer efter istiden. Man fandt følgende sammenhørende værdier af pollenforøgelsen og antal år efter de første fyrretræer kom til de britiske øer.

Antal år	20	100	150	200	250	300	350
Pollenforøgelsen (målt i pollen Korn pr. cm^2 pr. år)	1600	1950	3020	4510	6230	10100	14350

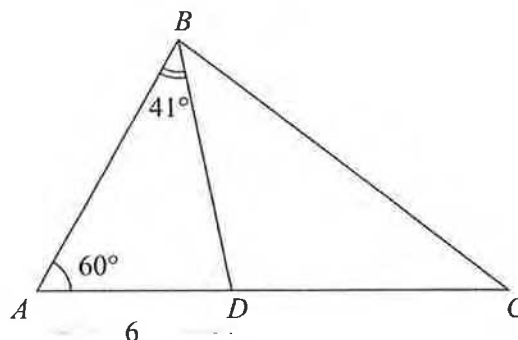
I en model beskrives sammenhængen som

$$h(t) = b \cdot a^t,$$

hvor $h(t)$ er pollenforøgelsen (målt i pollen Korn pr. cm^2 pr. år), og t er antal år efter de første fyrretræer kom til de britiske øer.

- Benyt tabellens data til at bestemme konstanterne a og b .
- Benyt modellen til at bestemme fordoblingstiden samt til at bestemme, hvornår pollenforøgelsen i sedimentet var 50000 Korn pr. cm^2 pr. år.

Opgave 11



På figuren ses trekant ABC , hvor vinkelhalveringslinjen for vinkel B er indtegnet, og nogle af målene er angivet.

- Bestem $|BD|$ og $|AC|$.

Opgave 12 I en model kan udbredelsen af traktorer i staten Punjab i Indien beskrives ved funktionen

$$N(t) = \frac{481722}{1 + 16,4579 \cdot e^{-0,163256 \cdot t}},$$

hvor $N(t)$ betegner antallet af traktorer til tidspunktet t (målt i år efter 1970).

- Tegn grafen for N , og bestem, hvor mange traktorer der ifølge modellen vil være i Punjab i år 2013.
- Bestem $N'(20)$, og beskriv hvad tallet fortæller om udviklingen i antallet af traktorer i Punjab i 1990.

Kilde: Amritbir Singh & Ravi Kant Mishra, *A Mathematical Modeling Approach To Study Growth Rate Of Grassroots Technological Innovations*, Ijrras 3 (2), May 2010.

Opgave 13



Tabellen nedenfor viser oplagstallene for 2011 for fem danske dagblade.

Politiken	Jyllandsposten	Fyns Stiftstidende	Information	Berlingske
196.712	208.037	90.581	42.695	197.708

Blandt 200 af disse dagblades abonnenter har man i 2013 spurgt om, hvilket dagblad de abonnerer på. Deres svar fordeler sig således:

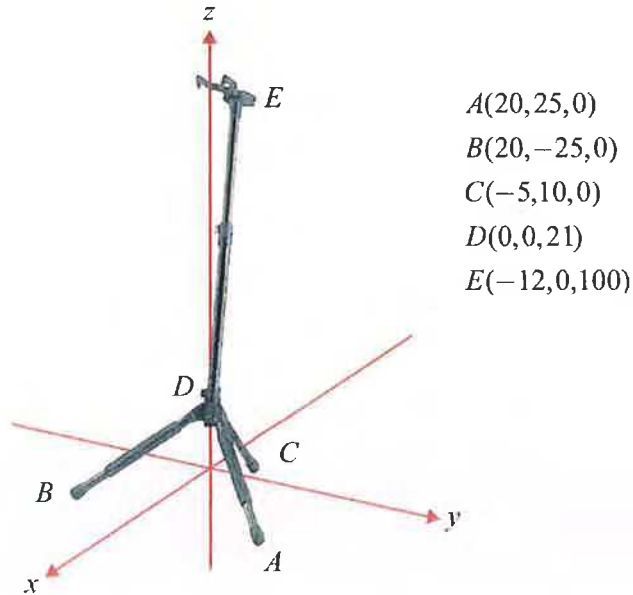
Politiken	Jyllandsposten	Fyns Stiftstidende	Information	Berlingske
45	63	24	20	48

Man ønsker at undersøge, om fordelingen af disse dagblade blandt abonnenterne har ændret sig siden 2011.

- Opstil en nulhypotese, og beregn på baggrund af denne det forventede antal svar blandt de 200 adspurgte abonnenter.
- Test om hypotesen kan forkastes på et 5% signifikansniveau.

Kilde: www.do.dk

Opgave 14



På figuren ses et guitarstativ indlagt i et koordinatsystem, således at stativets tre fødder ligger i punkterne A , B og C . I punktet E er der monteret et gaffelophæng, som guitaren hænger i, således at guitarens krop støtter på de to ben AD og BD .

- Bestem en ligning for den plan α , der indeholder de to ben AD og BD .
- Bestem en parameterfremstilling for den linje l , der går gennem punkterne D og E , og bestem den stumpe vinkel mellem l og α .

Opgave 15 En funktion f af to variable er givet ved

$$f(x, y) = x^2 + y^3 + 2xy.$$

- Bestem de partielt afledede og den blandede afledede af f .
- Bestem en ligning for tangentplanen til grafen for f i punktet $(-\frac{1}{2}, 1, f(-\frac{1}{2}, 1))$.
- Bestem de stationære punkter for f , og tegn grafen for f .

Opgave 16 En beholder er fyldt med en gas under tryk. Fra en lille ventil i toppen af beholderen strømmer gas ud. I en model er trykket i beholderen P (målt i atm) som funktion af tiden t (målt i minutter efter åbning af ventilen) en løsning til differentialligningen

$$\frac{dP}{dt} = -k \cdot (P - 1,0).$$

Det oplyses, at trykket til tidspunktet $t = 0$ er 5,0 atm, og at trykket til tidspunktet $t = 25$ er 2,0 atm.



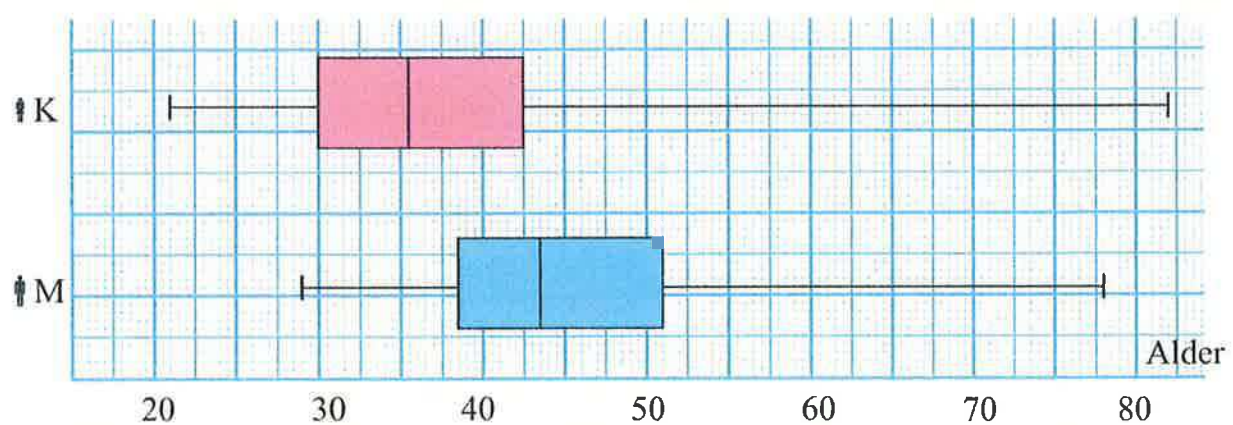
- Bestem en forskrift for $P(t)$, og skitsér grafen for $P(t)$.

BILAG

Bilaget kan indgå i besvarelsen.

Skole	Hold		ID
Navn	Ark nr	Antal ark i alt	Tilsynsførende

3





MINISTERIET FOR
BØRN OG
UNDERVISNING
KVALITETS- OG
TILSYNSSTYRELSEN

Matematik A

Studentereksamen

Onsdag den 29. maj 2013
kl. 9.00 - 14.00

Opgavesættet er delt i to dele.

Delprøven uden hjælpemidler består af opgave 1-6 med i alt 6 spørgsmål.
Delprøven med hjælpemidler består af opgave 7-15 med i alt 19 spørgsmål.

De 25 spørgsmål indgår med lige vægt i bedømmelsen.

Bedømmelsen af det skriftlige eksamenssæt

I bedømmelsen af besvarelsen af de enkelte spørgsmål og i helhedsindtrykket vil der blive lagt vægt på, om eksaminandens tankegang fremgår klart af besvarelsen. Dette vurderes blandt andet ud fra kravene beskrevet i de følgende fem kategorier:

1. TEKST

Besvarelsen skal indeholde en forbindende tekst fra start til slut, der giver en klar præsentation af, hvad den enkelte opgave og de enkelte delspørgsmål går ud på.

2. NOTATION OG LAYOUT

Der kræves en hensigtsmæssig opstilling af besvarelsen i overensstemmelse med god matematisk skik, herunder en redegørelse for den matematiske notation, der indføres og anvendes, og som ikke kan henføres til standardviden.

3. REDEGØRELSE OG DOKUMENTATION

Besvarelsen skal indeholde en redegørelse for den anvendte fremgangsmåde og dokumentation i form af et passende antal mellemregninger og/eller en matematisk forklaring på brugen af de forskellige faciliteter, som et værktøjsprogram tilbyder.

4. FIGURER

I besvarelsen skal der indgå en hensigtsmæssig brug af figurer og illustrationer, og der skal være en tydelig sammenhæng mellem tekst og figurer.

5. KONKLUSION

Besvarelsen skal indeholde en afrunding af de forskellige spørgsmål med præcise konklusioner, præsenteret i et klart sprog og/eller med brug af almindelig matematisk notation.

Delprøven uden hjælpemidler

Kl. 09.00 – 10.00

Opgave 1 En parabel er graf for en funktion med forskriften $f(x) = 2x^2 - 8x + 15$.

Bestem koordinatsættet til parablens toppunkt.

Opgave 2 I en model kan udviklingen i antallet af rådyr i et bestemt område i Danmark beskrives ved funktionen

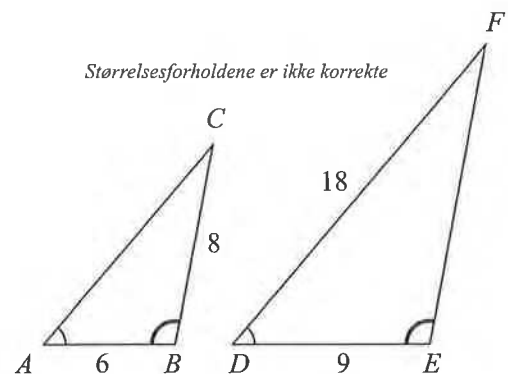
$$N(t) = 25000 \cdot 1.03^t,$$

hvor $N(t)$ beskriver antallet af dyr til tidspunktet t (målt i år efter år 2000).

Gør rede for betydningen af tallene i forskriften for $N(t)$.

Opgave 3 På figuren ses to ensvinklede trekanter ABC og DEF . Nogle af sidelængderne er angivet på figuren.

Bestem omkredsen af trekant ABC .



Opgave 4 En funktion f er bestemt ved

$$f(x) = 6x^2 + 3.$$

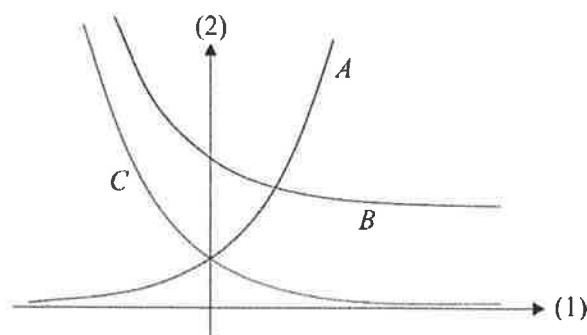
Bestem en forskrift for den stamfunktion til f , hvis graf går gennem punktet $P(2,10)$.

Opgave 5 Hver af de tre grafer A , B og C på figuren er graf for en af de tre funktioner f , g og h . De tre funktioner er bestemt ved

$$f(x) = 0,5^x$$

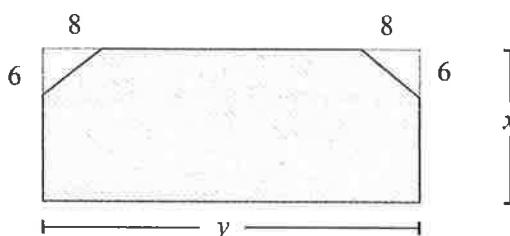
$$g(x) = 2^x$$

$$h(x) = 0,5^x + 2$$



Gør for hver af graferne A , B og C rede for, hvilken af de tre funktioner den er graf for.

Opgave 6 På figuren ses et rektangel med sidelængder x og y , hvorfra der er afskåret to retvinklede trekanter med sidelængder 6 og 8. Den tiloversblevne skraverede figur har omkredsen 200.



Bestem x og y , så figurens areal bliver størst muligt.

Besvarelsen afleveres kl. 10.00

Delprøven med hjælpemidler

Kl. 09.00 – 14.00

Opgave 7 I et koordinatsystem i planen er givet to punkter $A(20,5)$ og $B(5,10)$ samt en vektor $\vec{a} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

- a) Bestem arealet af parallelogrammet udspændt af $\overrightarrow{AB}$ og $\vec{a}$.
- b) Bestem koordinatsættet til projektionen af $\overrightarrow{AB}$ på $\vec{a}$.

Opgave 8



For et bestemt fragtskib har man målt sammenhørende værdier af motoreffekt og fart.

Motoreffekt (kW)	1537	2003	2637	3489	4537	5755	7606
Fart (knob)	10	11	12	13	14	15	16

I en model kan sammenhængen beskrives ved en funktion af typen

$$f(x) = b \cdot x^a,$$

hvor $f(x)$ er farten (målt i knob) ved en motoreffekt på x (målt i kW).

- a) Benyt tabellens data til at bestemme konstanterne a og b .
- b) Hvor hurtigt sejler skibet, når motoreffekten er 8000 kW?
- c) Hvor mange procent øges farten, når motoreffekten øges med 30%?

Opgave 9 En funktion f er bestemt ved

$$f(x) = x^3 + 6x^2 + 9x.$$

- a) Tegn grafen for f , og bestem funktionens nulpunkter.
- b) Bestem monotoniforholdene for f .

En anden funktion g er bestemt ved

$$g(x) = -x^2 + bx + c,$$

hvor b og c er konstanter. Det oplyses, at graferne for f og g har en fælles tangent t i punktet $P(1, f(1))$.

- c) Bestem en ligning for tangenten t , og bestem konstanterne b og c .

Opgave 10 Den væksthastighed, hvormed salmonellabakterier udvikler sig i råt kød, afhænger af den temperatur, som kødet opbevares ved. I en model kan væksthastigheden for salmonellabakterier som funktion af temperaturen beskrives ved funktionen

$$r(t) = 7,18 \cdot 10^{-4} \cdot (t - 0,93)^2 \cdot (1 - e^{0,464(t - 46,96)}), \quad 0 \leq t \leq 47,$$

hvor $r(t)$ betegner væksthastigheden af salmonellabakterier (målt i CFU/g pr. time), og t betegner temperaturen (målt i $^{\circ}\text{C}$).

- a) Bestem den temperatur, hvor væksthastigheden for salmonellabakterier er størst.

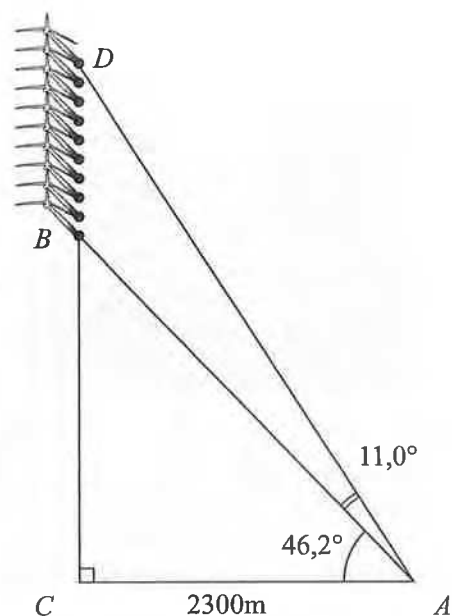
Kilde: Juneja et al., "Mathematical Modeling of Growth of Salmonella in Raw Ground Beef under Isothermal Conditions from 10 to 45 $^{\circ}\text{C}$ ", *Biological Systems Engineering: Papers and Publications*. Paper 37. 2009.

Opgave 11

set fra punkt C



set fra punkt A



Ovenfor ses to fotos samt en model af en vindmøllepark med ti møller set fra to forskellige steder på land, nemlig fra punktet A og punktet C. Afstanden mellem de to punkter er 2300 meter. Sigtevinklerne fra punktet A til den nærmeste mølle i punktet B og til den fjerneste mølle i punktet D er målt og angivet på figuren.

- a) Bestem, hvor langt den nærmeste mølle er fra land, og bestem møllernes indbyrdes afstand.

Opgave 12

I Biblioteksstyrelsens undersøgelse af gymnasielevs informationsadfærd på de tre gymnasiale uddannelser stx, hhx og htx har respondenterne blandt andet forholdt sig til følgende udsagn om litteraturlæsning:

Jeg læser næsten ikke andet end pensum.

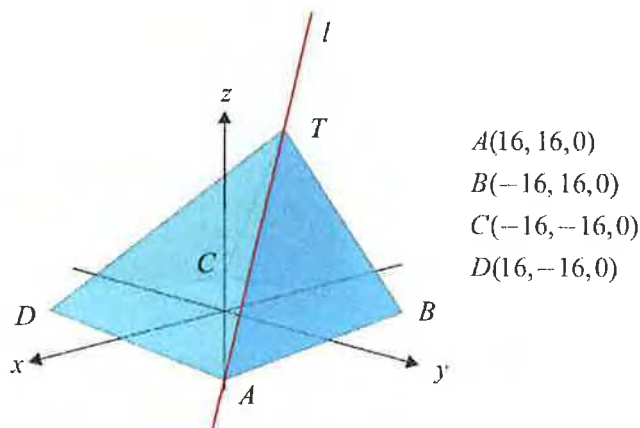
Svarfordelingen på udsagnet var som vist i tabellen nedenfor.

Svar\Gymnasietype	stx	hhx	htx
Uenig	131	69	36
Ved ikke	102	76	27
Enig	235	207	70

- a) Opstil en nulhypotese, der kan anvendes til at teste, om informationsadfærden vedrørende litteraturlæsning er uafhængig af gymnasietype, og undersøg, om nulhypotesen kan forkastes på et 5% signifikansniveau.

Kilde: Gymnasieelever og biblioteker, Biblioteksstyrelsen, 2007.

Opgave 13



På figuren ses en skæv glasperamide indtegnet i et koordinatsystem med enheden dm på akserne. Glasperamidens bund er kvadratisk, og koordinatsættene for hjørnepunkterne er angivet på figuren. Pyramidens højeste punkt betegnes T . Linjen l , der går gennem punktet A og punktet T , har parameterfremstillingen

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 16 \\ 16 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -27 \\ -16 \\ 23 \end{pmatrix}, \text{ hvor } s \in \mathbb{R}.$$

- a) Bestem en ligning for den plan α , der indeholder glasperamidens sideflade ATB .

Den plan β , der indeholder sidefladen BCT , har ligningen

$$23x - 5z + 368 = 0.$$

- b) Bestem koordinatsættet til T , som er skæringspunktet mellem l og β .
- c) Bestem den stumpe vinkel mellem α og β .

Opgave 14

En funktion f er givet ved

$$f(x) = e^{-0,1x} \cdot \sin(\pi \cdot x), \quad x \geq 0.$$

Funktionen f har i intervallet $[0; 3]$ to x -værdier x_1 og x_2 , hvori der er lokale maksima.

- a) Tegn grafen for f , og bestem koordinatsættene til hvert af punkterne $A(x_1, f(x_1))$ og $B(x_2, f(x_2))$.
- b) Bestem en forskrift for den eksponentialfunktion $g(x) = b \cdot a^x$, hvis graf går gennem A og B .

Graferne for de to funktioner f og g afgrænser i intervallet $[x_1; x_2]$ et område M , der har et areal.

- c) Bestem arealet af M .

- Opgave 15** I en model for en bestemt kemisk reaktion omdannes et stof A . Mængden af stoffet A som funktion af tiden er en løsning til differentialligningen:

$$\frac{dM}{dt} = -k \cdot M^2,$$

hvor k er en konstant, og M er mængden (målt i mg) af stoffet A til tidspunktet t (målt i minutter). Til tidspunktet $t = 0$ er der 70 mg af stoffet A , og til tidspunktet $t = 60$ er der 20 mg tilbage af stoffet A .

- Bestem en forskrift for $M(t)$, og bestem konstanten k .
- Bestem $M'(60)$, og gør rede for betydningen af dette tal.





**MINISTERIET FOR
BØRN OG
UNDERVISNING**
KVALITETS- OG
TILSYNSSTYRELSEN

Matematik B

Studentereksamen

Onsdag den 29. maj 2013
kl. 9.00 - 13.00

Opgavesættet er delt i to dele.

Delprøven uden hjælpemidler består af opgave 1-6 med i alt 6 spørgsmål.
Delprøven med hjælpemidler består af opgave 7-12 med i alt 14 spørgsmål.

De 20 spørgsmål indgår med lige vægt i bedømmelsen.

Bedømmelsen af det skriftlige eksamenssæt

I bedømmelsen af besvarelsen af de enkelte spørgsmål og i helhedsindtrykket vil der blive lagt vægt på, om eksaminandens tankegang fremgår klart af besvarelsen. Dette vurderes blandt andet ud fra kravene beskrevet i de følgende fem kategorier:

1. TEKST

Besvarelsen skal indeholde en forbindende tekst fra start til slut, der giver en klar præsentation af, hvad den enkelte opgave og de enkelte delspørgsmål går ud på.

2. NOTATION OG LAYOUT

Der kræves en hensigtsmæssig opstilling af besvarelsen i overensstemmelse med god matematisk skik, herunder en redegørelse for den matematiske notation, der indføres og anvendes, og som ikke kan henføres til standardviden.

3. REDEGØRELSE OG DOKUMENTATION

Besvarelsen skal indeholde en redegørelse for den anvendte fremgangsmåde og dokumentation i form af et passende antal mellemregninger og/eller en matematisk forklaring på brugen af de forskellige faciliteter, som et værktøjsprogram tilbyder.

4. FIGURER

I besvarelsen skal der indgå en hensigtsmæssig brug af figurer og illustrationer, og der skal være en tydelig sammenhæng mellem tekst og figurer.

5. KONKLUSION

Besvarelsen skal indeholde en afrunding af de forskellige spørgsmål med præcise konklusioner, præsenteret i et klart sprog og/eller med brug af almindelig matematisk notation.

Delprøven uden hjælpemidler

K1. 09.00 – 10.00

Opgave 1 En funktion f er bestemt ved

$$f(x) = 4 \cdot 5^x.$$

Tabellen viser nogle støttepunkter for grafen til f .

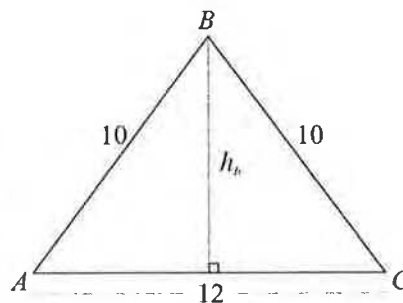
x	0	1	2
$f(x)$	4	20	

Udfyld resten af tabellen.

Opgave 2 Isolér y i ligningen

$$-15x + 5y - 45 = 0.$$

Opgave 3 I den ligebenede trekant ABC er siderne AB og BC lige lange. Nogle af målene for trekant ABC er angivet på figuren.



Bestem højden h_b fra B .

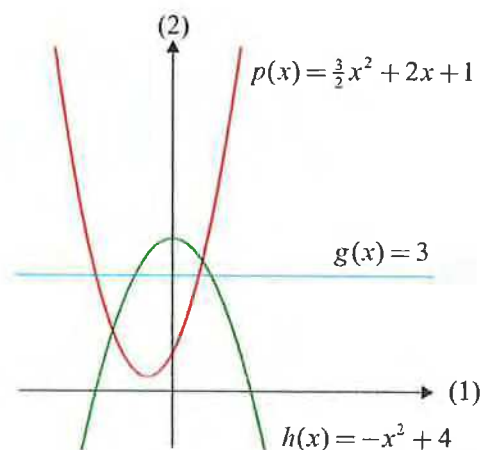
Opgave 4 Løs andengradsligningen

$$2x^2 - 8 = 0.$$

Opgave 5 En funktion f er bestemt ved

$$f(x) = 3x + 2.$$

På figuren ses graferne for de tre funktioner g , h og p .



Argumentér for, hvilken af de tre funktioner der er en stamfunktion til f .

Opgave 6 En funktionen f er bestemt ved

$$f(x) = 4e^x + 1.$$

Bestem en ligning for tangenten til grafen for f i punktet $P(0, f(0))$.

Besvarelsen afleveres kl. 10.00

Delprøven med hjælpemidler

Kl. 09.00 – 13.00

Opgave 7



Foto: commons.wikimedia.org

Tabellen nedenfor viser nogle sammenhørende værdier af den gennemsnitlige kuld-
størrelse og antal ynglende sangspurvepar pr. acre for arten Melospiza melodia.

Antal ynglende sangspurvepar pr. acre	5	18	29	46	55	57	66	72
Gennemsnitlig kuldstørrelse	3,8	3,6	3,5	3,4	3,2	3,3	3,2	3,1

I en model er sammenhængen givet ved

$$y = ax + b,$$

hvor y er den gennemsnitlige kuldstørrelse, og x er antal ynglende sangspurvepar pr. acre.

- Benyt tabellens data til at bestemme tallene a og b .
- Benyt modellen til at bestemme antal ynglende sangspurvepar pr. acre, når den gennemsnitlige kuldstørrelse er nede på 3,0.

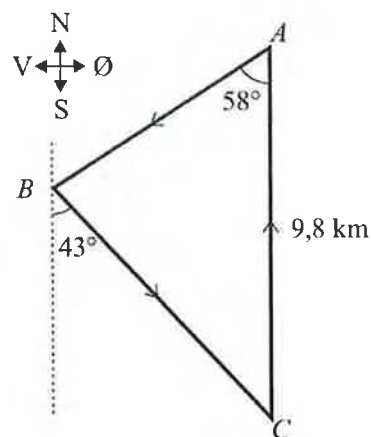
Opgave 8

Et racerbådsløb afvikles på en bane, som vist på figuren. Løbet starter ved A , hvor bådene sejler i retningen syd 58° vest til B , derefter i retningen syd 43° øst til C , hvorefter de sejler i retningen stik nord tilbage til A . Denne sidste strækning fra C til A er 9,8 km lang.

- Argumentér for, at vinkel C i trekant ABC er 43° , og bestem afstanden fra B til C .

Under racerbådsløbet er et område svarende til trekant ABC afspærret.

- Hvor stort et areal er afspærret under racerbådsløbet?



Opgave 9



Foto: Wikimedia Commons

”Danskerne sviner mere end nogensinde

I 1994 blev der i Danmark produceret 11.105.000 ton affald. I 2004 var tallet steget til 13.359.000 ton affald. Og tallet er steget yderligere frem til i dag.”

I det følgende antages det, at udviklingen i affaldsproduktionen i Danmark vokser eksponentielt i perioden 1994-2004.

- Vis, at den gennemsnitlige årlige procentvise stigning i affaldsproduktionen i Danmark i perioden 1994-2004 var 1,865% .
- Indfør passende variable, og opstil med udgangspunkt i den gennemsnitlige årlige procentvise stigning en model, der beskriver udviklingen i affaldsproduktionen i Danmark i perioden 1994-2004.
- Benyt modellen til at bestemme, hvor lang tid der går, før affaldsproduktionen i Danmark er fordoblet.

Kilde: Affaldsstatistik 2009 og Fremskrivning af affaldsmængder 2011-2050, Orientering fra Miljøstyrelsen Nr. 4 2011.

Opgave 10

I Indien har man udviklet en regional model, der beskriver sammenhængen mellem kropstemperaturen og den tid, der er gået, siden personen er død. Modellen er givet ved

$$f(x) = 1097,9 - 35,8309x + 0,398778x^2 - 0,00150341x^3, \quad 88 \leq x \leq 99,$$

hvor $f(x)$ betegner tiden efter personen er død (målt i timer), og x betegner kropstemperaturen (målt i °F).

- Tegn grafen for f , og bestem den tid, der er gået, siden personen er død, når kropstemperaturen er 90 °F .
- Bestem kropstemperaturen for en person 2 timer efter personens død.

Kilde: Polynomial regression model to estimate time since death in adults from rectal temperature in Chandigarh zone of Northwest India, Dr. Dalbir Singh et al, 2005.

- Opgave 11** I en landsdækkende statistik fra 2010 fandt man følgende svarfordeling vedrørende internetadgang i danske husstande:

Internetadgang	ADSL	Kabelmodem	Fiberoptik	Mobilt bredbånd	Ved ikke
Andel af husstande	38%	33%	8%	11%	10%

Et år senere blev 800 tilfældigt udvalgte danske husstande spurgt om, hvilken internetadgang de benytter i deres husstand. Svarfordelingen fremgår af nedenstående tabel.

Internetadgang	ADSL	Kabelmodem	Fiberoptik	Mobilt bredbånd	Ved ikke
Antal husstande	300	235	78	106	81

- Forklar, hvad der er stikprøve og population i ovenstående, og opstil en nulhypotese, der kan anvendes til at undersøge om internetadgangen i danske husstande har ændret sig siden 2010.
- Undersøg på et 5% signifikansniveau, om nulhypotesen må forkastes.

Kilde: Danmarks Statistik – statistikbanken.dk

- Opgave 12** En funktion f er givet ved

$$f(x) = 8 \cdot x^{-1} + \frac{1}{2}x - 3, \quad x > 0.$$

- Løs ligningen $f'(x) = 0$, og bestem monotoniforholdene for f .

En funktion g er givet ved

$$g(x) = -\frac{1}{2}x + 6.$$

- Tegn graferne for f og g i samme koordinatsystem, og bestem førstekoordinaten til hvert af de to skæringspunkter mellem de to grafer i 1. kvadrant.

De to grafer afgrænser i 1. kvadrant en punktmængde M , der har et areal.

- Bestem arealet af M .





MINISTERIET FOR
BØRN OG
UNDERVISNING
KVALITETS- OG
TILSYNSSTYRELSEN

gl.

Matematik A

Studentereksamen

Opgavesættet er delt i to dele.

Delprøven uden hjælpemidler består af opgave 1-6 med i alt 6 spørgsmål.
Delprøven med hjælpemidler består af opgave 7-15 med i alt 19 spørgsmål.

De 25 spørgsmål indgår med lige vægt i bedømmelsen.

Bedømmelsen af det skriftlige eksamenssæt

I bedømmelsen af besvarelsen af de enkelte spørgsmål og i helhedsindtrykket vil der blive lagt vægt på, om eksaminandens tankegang fremgår klart af besvarelsen. Dette vurderes blandt andet ud fra kravene beskrevet i de følgende fem kategorier:

1. TEKST

Besvarelsen skal indeholde en forbindende tekst fra start til slut, der giver en klar præsentation af, hvad den enkelte opgave og de enkelte delspørgsmål går ud på.

2. NOTATION OG LAYOUT

Der kræves en hensigtsmæssig opstilling af besvarelsen i overensstemmelse med god matematisk skik, herunder en redegørelse for den matematiske notation, der indføres og anvendes, og som ikke kan henføres til standardviden.

3. REDEGØRELSE OG DOKUMENTATION

Besvarelsen skal indeholde en redegørelse for den anvendte fremgangsmåde og dokumentation i form af et passende antal mellemregninger og/eller en matematisk forklaring på brugen af de forskellige faciliteter, som et værktøjsprogram tilbyder.

4. FIGURER

I besvarelsen skal der indgå en hensigtsmæssig brug af figurer og illustrationer, og der skal være en tydelig sammenhæng mellem tekst og figurer.

5. KONKLUSION

Besvarelsen skal indeholde en afrunding af de forskellige spørgsmål med præcise konklusioner, præsenteret i et klart sprog og/eller med brug af almindelig matematisk notation.

Delprøven uden hjælpemidler

Kl. 09.00 – 10.00

Opgave 1 En linje l har parameterfremstillingen

$$l: \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Bestem en ligning for den linje m , der går gennem punktet $(3,4)$ og er vinkelret på l .

Opgave 2 Tre eksponentialfunktioner f , g og h er givet ved

$$f(x) = 2^x$$

$$g(x) = 3^x$$

$$h(x) = \frac{g(x)}{f(x)}.$$

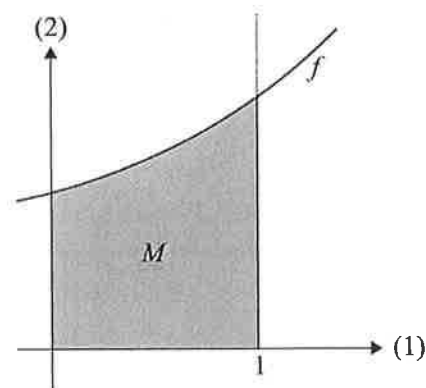
Bestem fremskrivningsfaktoren for funktionen h .

Opgave 3 En funktion f er bestemt ved

$$f(x) = e^x + 2.$$

Grafen for f , de to koordinataksler og linjen med ligningen $x = 1$ afgrænser i 1. kvadrant en punktmængde M (se figur).

Bestem arealet af M .



Opgave 4 For en kugle med radius r og volumen V gælder, at $V = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot r^3$.
En bestemt kugle har rumfanget $\frac{32}{3} \cdot \pi$.

Bestem radius for denne kugle.

Opgave 5 En funktion f er bestemt ved

$$f(x) = x^3 - \frac{3}{2}x^2 - 6x + 7.$$

Bestem monotoniforholdene for f .

Opgave 6 En funktion f er løsning til differentialligningen

$$\frac{dy}{dx} = 3y + 5.$$

Grafen for f går gennem punktet $P(1, 4)$.

Bestem en ligning for tangenten til grafen for f i punktet P .

Besvarelsen afleveres kl. 10.00
--

Delprøven med hjælpemidler

Kl. 09.00 – 14.00

Opgave 7

Nedenstående tabel viser en opgørelse over det årlige antal reklametimer, der blev vist på de danske tv-kanaler i perioden 2000-2010.

År	2000	2005	2008	2009	2010
Reklametimer	4963	8249	10296	12459	13661

I en model kan udviklingen i det årlige antal reklametimer på de danske tv-kanaler beskrives ved

$$f(t) = b \cdot a^t,$$

hvor $f(t)$ er det årlige antal reklametimer på de danske tv-kanaler, og t er antal år efter 2000.

- a) Benyt tabellens data til at bestemme a og b .
- b) Bestem den tid, der går, før det årlige antal reklametimer er fordoblet.
- c) Bestem $f'(6)$, og giv en fortolkning af dette tal.

Opgave 8

I et koordinatsystem i planen er to vektorer $\vec{a}$ og $\vec{b}$ givet ved

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} -3 \\ 7 \end{pmatrix} \text{ og } \vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \end{pmatrix}.$$

- a) Bestem vinklen mellem $\vec{a}$ og $\vec{b}$.
- b) Bestem arealet af den trekant, der udspændes af $\vec{a}$ og $\vec{b}$.

Opgave 9 I en model kan den årlige affaldsproduktion i EU pr. indbygger beskrives ved funktionen

$$w(t) = \frac{519,9}{1 + 0,098 \cdot e^{-0,434t}}$$

hvor $w(t)$ betegner den årlige affaldsproduktion pr. indbygger (målt i kg) til tiden t (målt i år efter 1994).

- a) Benyt modellen til at bestemme, hvor mange kg affald en EU-borger producerede i 1994.

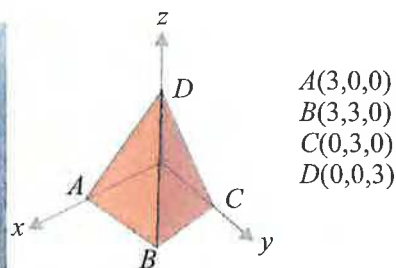
I en rapport fra EU hedder det:

Produktionen af kommunalt affald i EU er aftaget og har stabiliseret sig på omkring 520 kg pr. indbygger siden 2002.

- b) Tegn grafen for w , og gør rede for, hvordan modellen understøtter denne påstand.

Kilde: *Environment and energy, Eurostat, Statistics in focus*, 31/2011.

Opgave 10 I et stykke legetøj går det ud på at samle tre pyramider, så de danner en kube. Figuren viser en model af en af de tre pyramider.



- a) Bestem ligningen for den plan α , som fladen ABD er del af.

Det oplyses, at den plan β , som fladen BCD er en del af, har ligningen

$$y + z = 3.$$

- b) Bestem den spidse vinkel mellem fladen ABD og fladen BCD .

- Opgave 11** Elforsyningspriser i Danmark er i en rapport fra 2012 blevet opgjort. For 8 elselskaber i Nordjylland fordeler priserne for elforbrug (målt i øre pr kWh) sig som følgende

39,99	43,11	43,67	43,23	42,95	39,99	42,9	43,1
-------	-------	-------	-------	-------	-------	------	------

- a) Bestem kvartilsættet, og tegn et boksplot for datasættet.

For elselskaber i resten af Danmark er kvartilsættet ifølge rapporten (43,15, 43,25, 43,7). Prisen hos det billigste elselskab i resten af Danmark er på 41,09 øre pr kWh, og prisen på det dyreste er på 47,73 øre pr kWh.

- b) Tegn et boksplot over elpriserne i resten af Danmark i samme koordinatsystem som boksplottet for fordelingen af elpriser i Nordjylland, og sammenlign priserne på baggrund af de to boksplot.

- Opgave 12** På billedet ses Golden Gate Bridge indlagt i et koordinatsystem med enheden meter på begge akser. Koordinatsystemets nulpunkt ligger ved vandoverfladen hos den nordlige pylon til venstre i billedet. Bærekablets monteringspunkter på de to pyloner ligger 220 m over vandoverfladen, og kablets laveste punkt er 80 m over vandoverfladen. Afstanden mellem monteringspunkterne er 1280 m.

I en model beskrives bærekablet mellem de to pyloner ved en del af grafen for et andengradspolynomium:

$$f(x) = ax^2 + bx + c.$$



Kilde: wikipedia commons

- a) Bestem en forskrift for f .

Det oplyses, at buelængden af grafen for en funktion $f(x)$ i intervallet $[x_1; x_2]$ er givet ved

$$\int_{x_1}^{x_2} \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx.$$

- b) Benyt modellen til at bestemme længden af bærekablet mellem de to pyloner.

Opgave 13

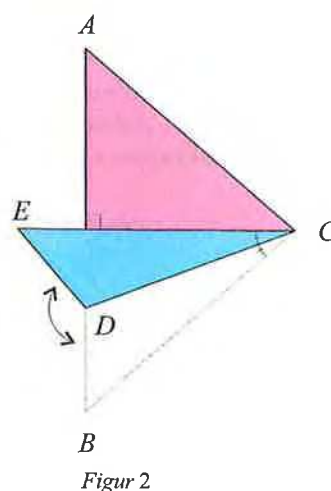
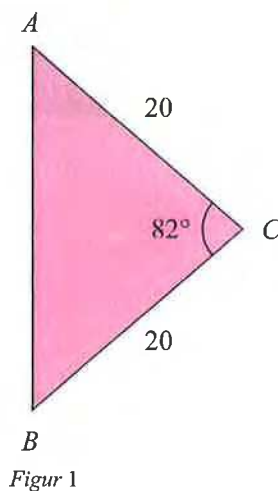


I en model for koncentrationen af et bestemt rygestopmiddel i blodet hos en person er koncentrationen $c(t)$ (målt i $\mu\text{g} / \text{L}$) som funktion af tiden t (målt i timer efter indtagelsen af stoffet) en løsning til differentialligningen

$$c' = -0,035 \cdot c.$$

- Hvor hurtigt aftager koncentrationen af rygestopmidlet, når koncentrationen i blodet er på $1,5 \mu\text{g} / \text{L}$?
- Bestem en forskrift for $c(t)$, når det oplyses, at koncentrationen af rygestopmidlet er $2,0 \mu\text{g} / \text{L}$ til tidspunktet $t=0$.

Opgave 14



Et stykke karton har form som en ligebenet trekant, hvor de lige ben er 20 cm lange, som vist på figur 1.

- Bestem $|AB|$, og bestem vinkel A .

Kartonstykket foldes til en silhuet af et lille sejlskib, som vist på figur 2. Foldningen sker langs en linje CD , således at B føres over i E .

- Bestem $|DC|$, og bestem arealet af trekant CDE .

Opgave 15



To funktioner f og g er bestemt ved

$$f(x) = -0,15x^2 + 2,205x - 0,858$$

$$g(x) = -0,12x^2 + 1,3x + 4,2$$

Graferne for f og g afgrænser sammen med koordinatsystemets akser i første kvadrant et område M , hvor $g(x) \geq f(x)$.

En træskål har form som det omdrejningslegeme, der fremkommer, når M roteres 360° om førsteaksen. Enheden på begge akser er cm.

- Tegn graferne for f og g , og bestem skålens højde.
- Hvor stort er rumfanget af det træ, der udgør skålen?





MINISTERIET FOR
BØRN OG
UNDERVISNING
KVALITETS- OG
TILSYNSSTYRELSEN

gl.

Matematik B

Studentereksamen

Opgavesættet er delt i to dele.

Delprøven uden hjælpemidler består af opgave 1-6 med i alt 6 spørgsmål.
Delprøven med hjælpemidler består af opgave 7-13 med i alt 14 spørgsmål.

De 20 spørgsmål indgår med lige vægt i bedømmelsen.

Bedømmelsen af det skriftlige eksamenssæt

I bedømmelsen af besvarelsen af de enkelte spørgsmål og i helhedsindtrykket vil der blive lagt vægt på, om eksaminandens tankegang fremgår klart af besvarelsen. Dette vurderes blandt andet ud fra kravene beskrevet i de følgende fem kategorier:

1. TEKST

Besvarelsen skal indeholde en forbindende tekst fra start til slut, der giver en klar præsentation af, hvad den enkelte opgave og de enkelte delspørgsmål går ud på.

2. NOTATION OG LAYOUT

Der kræves en hensigtsmæssig opstilling af besvarelsen i overensstemmelse med god matematisk skik, herunder en redegørelse for den matematiske notation, der indføres og anvendes, og som ikke kan henføres til standardviden.

3. REDEGØRELSE OG DOKUMENTATION

Besvarelsen skal indeholde en redegørelse for den anvendte fremgangsmåde og dokumentation i form af et passende antal mellemregninger og/eller en matematisk forklaring på brugen af de forskellige faciliteter, som et værktøjsprogram tilbyder.

4. FIGURER

I besvarelsen skal der indgå en hensigtsmæssig brug af figurer og illustrationer, og der skal være en tydelig sammenhæng mellem tekst og figurer.

5. KONKLUSION

Besvarelsen skal indeholde en afrunding af de forskellige spørgsmål med præcise konklusioner, præsenteret i et klart sprog og/eller med brug af almindelig matematisk notation.

Delprøven uden hjælpemidler

Kl. 09.00 – 10.00

Opgave 1 Reducér udtrykket $(p - q)^2 + 2pq - q^2$.

Opgave 2 I en internetbutik er prisen for en bestemt vare 45 kr. pr. enhed. Enhver ordre på et antal enheder af varen pålægges et forsendelsesgebyr på 100 kr.

Indfør passende variable, og opstil et regneudtryk, der beskriver sammenhæng mellem ordrens samlede pris og antallet af købte enheder af varen.

Opgave 3 Løs andengradsligningen $x^2 - 8x + 7 = 0$.

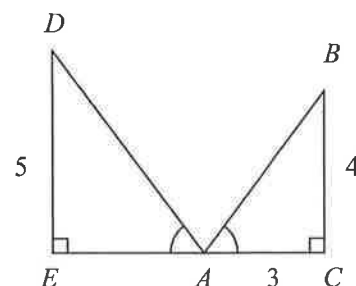
Opgave 4 En funktion f er bestemt ved

$$f(x) = e^x + x^2.$$

Bestem $f'(x)$.

Opgave 5 På figuren ses to ensvinklede og retvinklede trekanter ABC og ADE . Nogle af sidelængderne er angivet på figuren.

Bestem $|AB|$, og bestem omkredsen af trekant ADE .



Opgave 6 Bestem integralet $\int_0^2 (9x^2 + 3) dx$.

Besvarelsen afleveres kl. 10.00

Delprøven med hjælpemidler

K1. 09.00 – 13.00

Opgave 7

Tabellen viser den årlige affaldsproduktion fra danske husholdninger i perioden 1994-2008.

Årstal	1994	1996	1998	2000	2002	2004	2006	2008
Affaldsproduktion (tons)	2575	2767	2796	3084	3121	3164	3298	3654

I en model antages det, at den årlige affaldsproduktion fra danske husholdninger kan beskrives ved en model af typen

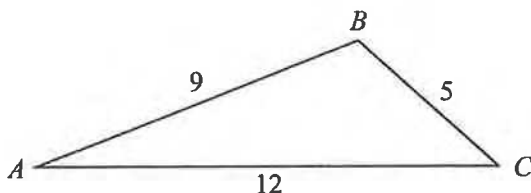
$$w(t) = b \cdot a',$$

hvor $w(t)$ betegner den årlige affaldsproduktion fra danske husholdninger (målt i tons) til tiden t (målt i år efter 1994).

- Benyt tabellens data til at bestemme a og b .
- Benyt modellen til at bestemme den årlige affaldsproduktion fra danske husholdninger i 2005, og bestem det år, hvor den årlige affaldsproduktion fra danske husholdninger var 3500 tons.
- Benyt modellen til at bestemme den årlige affaldsproduktion fra danske husholdninger i 2009, og vurder modellens rækkevidde ud fra en sammenligning af den fundne værdi og den faktiske værdi, som var 3437 tons.

Kilde: Affaldsstatistik 2009 og Fremskrivning af affaldsmængder 2011-2050, Orientering fra Miljøstyrelsen Nr. 4 2011.

Opgave 8



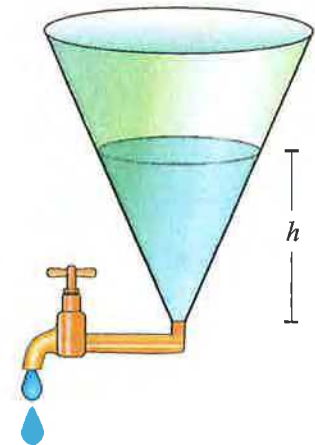
I trekant ABC er $a=5$, $b=12$ og $c=9$.

- Bestem vinkel A .
- Bestem længden af medianen fra B .

- Opgave 9** I en model for tømning af væske fra en bestemt beholder kan væskehøjden h (målt i cm) som funktion af tiden t (målt i sekunder) beskrives ved

$$h(t) = (3128 - 40 \cdot t)^{0,4}, \quad 0 \leq t \leq 78,2.$$

- a) Bestem væskehøjden i beholderen efter 20 sekunder, og bestem hvornår væskehøjden i beholderen er 5 cm.
- b) Bestem $h'(20)$, og giv en fortolkning af dette tal.



- Opgave 10** En funktion f er bestemt ved

$$f(x) = 0,25x^4 - 3x^3 + 12x^2 - 16x.$$

- a) Bestem en ligning for tangenten til grafen for f i punktet $P(5, f(5))$.
- b) Bestem monotoniforholdene for f .

- Opgave 11** To funktioner f og g er givet ved

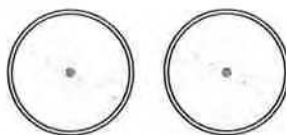
$$f(x) = 3 \cdot (x+1)^{0,5}, \quad x \geq -1$$

$$g(x) = x + 1$$

Graferne for f og g afgrænser i første og anden kvadrant en punktmængde M , der har et areal.

- a) Tegn graferne for f og g , og bestem arealet af M .

Opgave 12 Hjulsæt til racercykler har forskellig vægt.



I en cykelforretning A har man vejet forretningens hjulsæt til racercykler. Vægtene (målt i gram) fordeler sig således:

1795	1690	1550	1465	1445	1390	1295	1370	1550
------	------	------	------	------	------	------	------	------

- a) Bestem kvartilsættet, og tegn et boksplot for vægtfordelingen af hjulsættene til racercykler i cykelforretning A.

I en anden cykelforretning B vejer det letteste hjulsæt til racercykler 1232 g, det tungeste hjulsæt til racercykler vejer 1855 g, og kvartilsættet for vægtfordelingen af hjulsæt til racercykler er (1492, 1596, 1744).

- b) Tegn et boksplot for hver af hjulsættenes vægtfordeling i samme koordinatsystem, og benyt disse til at sammenligne vægtfordelingerne.

Opgave 13 I en model kan en virksomheds omkostninger ved produktion af en bestemt vare beskrives ved funktionen

$$O(x) = 0,0005 \cdot x^3 - 0,8 \cdot x^2 + 837 \cdot x + 35200, \quad x > 0,$$

hvor $O(x)$ betegner omkostningerne (målt i kr.) ved produktion af x enheder af varen. Enhedsomkostningerne $E(x)$ (målt i kr. pr. enhed) ved produktion af x enheder er bestemt ved

$$E(x) = \frac{O(x)}{x}.$$

- a) Bestem en regneforskrift for $E(x)$, og bestem $E(2000)$.

Det oplyses, at enhedsomkostningerne bliver mindst mulige, når $E(x) = O'(x)$.

- b) Bestem det antal enheder af varen virksomheden skal producere, for at enhedsomkostningerne bliver mindst mulige.





**MINISTERIET FOR
BØRN OG
UNDERVISNING**
KVALITETS- OG
TILSYNSSTYRELSEN

Matematik A

Studentereksamen

Digital eksamensopgave med adgang til internettet

Onsdag den 14. august 2013
kl. 09.00-14.00

Opgavesættet er delt i to dele.

Delprøve 1: 2 timer med autoriseret formelsamling

Delprøve 2: 3 timer med alle hjælpemidler

Delprøve 1 består af 12 spørgsmål

Delprøve 2 består af 13 spørgsmål

Alle spørgsmål tillægges hver 10 point

Bedømmelsen af det skriftlige eksamenssæt

I bedømmelsen af besvarelsen af de enkelte spørgsmål og i helhedsindtrykket vil der blive lagt vægt på, om eksaminandens tankegang fremgår klart af besvarelsen. Dette vurderes blandt andet ud fra kravene beskrevet i de følgende fem kategorier:

1. TEKST

Besvarelsen skal indeholde en forbindende tekst fra start til slut, der giver en klar præsentation af, hvad den enkelte opgave og de enkelte delspørgsmål går ud på.

2. NOTATION OG LAYOUT

Der kræves en hensigtsmæssig opstilling af besvarelsen i overensstemmelse med god matematisk skik, herunder en redegørelse for den matematiske notation, der indføres og anvendes, og som ikke kan henføres til standardviden.

3. REDEGØRELSE OG DOKUMENTATION

Besvarelsen skal indeholde en redegørelse for den anvendte fremgangsmåde og dokumentation i form af et passende antal mellemregninger og/eller en matematisk forklaring på brugen af de forskellige faciliteter, som et værktøjsprogram tilbyder.

4. FIGURER

I besvarelsen skal der indgå en hensigtsmæssig brug af figurer og illustrationer, og der skal være en tydelig sammenhæng mellem tekst og figurer.

5. KONKLUSION

Besvarelsen skal indeholde en afrunding af de forskellige spørgsmål med præcise konklusioner, præsenteret i et klart sprog og/eller med brug af almindelig matematisk notation.

Delprøve 1

Kl. 09.00 – 11.00

Opgave 1 To vektorer $\vec{a}$ og $\vec{b}$ er givet ved

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 9 \\ 5 \end{pmatrix} \text{ og } \vec{b} = \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

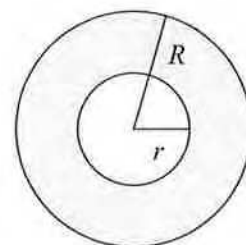
- Bestem arealet af parallelogrammet udspændt af $\vec{a}$ og $\vec{b}$.
- Undersøg, om $\vec{a}$ og $\vec{b}$ er ortogonale.

Opgave 2 En parabel er bestemt ved ligningen

$$y = 3x^2 + 6x - 1.$$

- Bestem koordinatsættet til parablens toppunkt.

Opgave 3 På figuren ses to cirkler. Den lille cirkel har radius r , mens den store cirkel har radius R .
Det oplyses, at $R = 13$ og at arealet af det skraverede område er 25π .

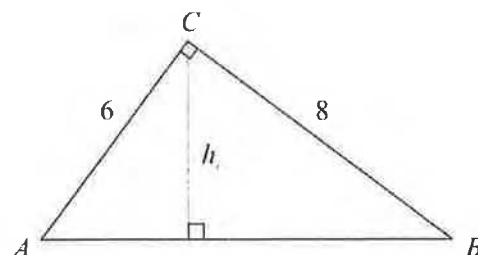


Størrelsesforholdene er ikke korrekte

- Bestem radius i den lille cirkel.

Opgave 4 Figuren viser en retvinklet trekant ABC .

- Bestem $|AB|$, og bestem h_c .



Opgave 5 En funktion f er bestemt ved

$$f(x) = (x^2 - 3) \cdot e^x.$$

- a) Bestem en ligning for tangenten til grafen for f i punktet $P(0, f(0))$.
- b) Bestem monotoniforholdene for f .

Opgave 6 En cirkel har centrum i $C(1, -2)$ og går gennem punktet $P(4, 2)$.

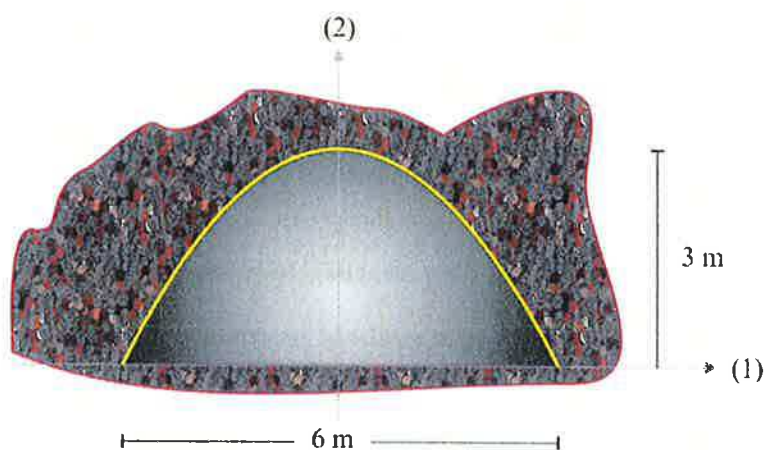
- a) Bestem en ligning for cirklen, og bestem en ligning for tangenten til cirklen i punktet P .

Linjen l er bestemt ved ligningen

$$4x + 3y + 27 = 0.$$

- b) Gør rede for, at l også er en tangent til cirklen.

Opgave 7



Figuren viser et tværsnit af en bjergtunnel indtegnet i et koordinatsystem. Den krumme del af tværsnittet har form som en del af en parabel. Tunnelen er 6 m bred og 3 m høj.

- a) Gør rede for, at parablen er graf for funktionen

$$p(x) = -\frac{1}{3}x^2 + 3.$$

- b) Bestem arealet af tværsnittet.

Opgave 8 a) Bestem integralet

$$\int_0^1 \frac{3x^2}{x^3 + 1} dx.$$

Besvarelsen afleveres kl. 11.00

Delprøve 2

Kl. 09.00 – 14.00

Opgave 9



Foto: Wikimedia commons

For en population af kaktusfinker på en af Galapagosøerne har man målt sammenhørende værdier af den årlige mængde af nedbør og det gennemsnitlige antal udklækkede æg for et finkepar.

Nedbør (mm pr. år)	48	373	593	698	741	958	1135
Gennemsnitligt antal udklækkede æg pr. par	0,32	0,66	0,84	1,72	1,94	3,92	6,72

I en model antages det, at der er en eksponentiel sammenhæng mellem de målte størrelser.

- Indfør passende variable, og benyt tabellens data til at bestemme en forskrift for sammenhængen.
- Bestem fordoblingskonstanten, og forklar betydningen af dette tal.

Opgave 10

For Oscar-vindere i kategorien "Bedste skuespiller" har man opgjort aldersfordelingen for perioden 1990-2011. Aldersfordelingen blandt de mandlige Oscar-vindere har middelværdi 43,6 år og kvartilsæt (38, 43, 48).

Aldersfordelingen blandt de kvindelige Oscar-vindere er:

43, 29, 33, 35, 45,
49, 39, 34, 26, 25,
33, 35, 35, 35, 28,
30, 29, 61, 32, 33,
45, 29

- Bestem middelværdi og kvartilsæt for aldersfordelingen blandt kvinderne, og benyt disse til at sammenligne de to aldersfordelinger.

- Opgave 11** En større internetbutik vil indføre et nyt produkt i deres sortiment. I den forbindelse vil butikken iværksætte en større reklamekampagne. Butikken formoder, at produktet appellerer lige meget til kvinder og mænd. Butikken har derfor på tilfældig vis udvalgt et antal kunder i butikken og spurgt dem, om de er interesserede i det pågældende produkt eller ej. Svarfordelingen blandt de 438 respondenter var som følger:

Køn\Interesse	Ja	Nej
Mand	96	112
Kvinde	128	102

- a) Opstil en nulhypotese, som internetbutikken kan anvende til at teste om deres formodning holder stik, og undersøg, om nulhypotesen må forkastes på et 5% signifikansniveau.

- Opgave 12** I en model kan de årlige udsving i jordoverfladens temperatur i Ribeirão Preto i Brasilien beskrives ved

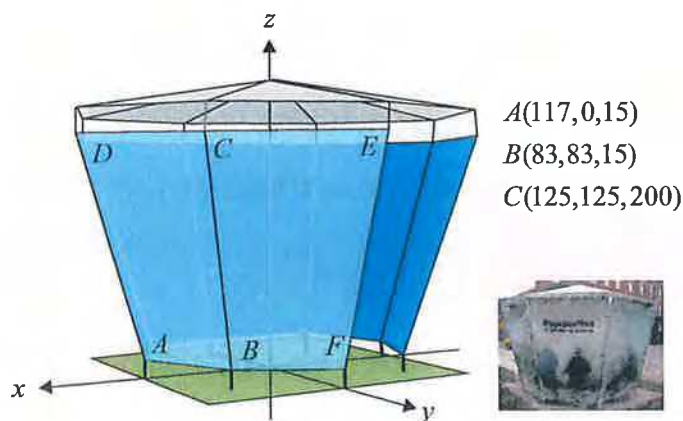
$$f(t) = 7,10 + 0,66 \cdot \sin(0,0172 \cdot t - 2,23), \quad 0 \leq t \leq 365$$

hvor $f(t)$ betegner jordens overfladetemperatur til tidspunktet t (målt i antal dage efter 1. januar).

- a) Tegn grafen for f , og bestem de to tidspunkter på året, hvor jordens overfladetemperatur er $7,5^\circ\text{C}$.

Kilde: *Analytical soil-temperature model, correction for temporal variation of daily amplitude*, E. A. Elias et. al. *Soil Sci. Soc. Am. J.* 68, 2004.

- Opgave 13** På figuren ses en model af en ottekantet rygepavillon indlagt i et koordinatsystem, og nogle af pavillonens hjørnekoordinater er angivet.



- a) Bestem en ligning for den plan, der indeholder sidefladen $ABCD$.

Det oplyses, at den plan, der indeholder sidefladen $BCEF$, er bestemt ved ligningen

$$370x + 925y - 294z - 103075 = 0.$$

- b) Bestem vinklen mellem sidefladerne $ABCD$ og $BCEF$.

- Opgave 14** En funktion f af to variable er givet ved

$$f(x, y) = \frac{x \cdot y}{x^2 + y^2 + 7}.$$

- a) Bestem gradienten for f i punktet $P(1, -1, f(1, -1))$, og forklar, hvad gradienten fortæller om grafens stejlhed i punktet P .

- Opgave 15** En funktion f af to variable er givet ved

$$f(x, y) = \frac{x}{x^4 + y^2 + 5}.$$

- a) Bestem en ligning for tangentplanen til grafen for f i punktet $(2, 1, f(2, 1))$.
- b) Bestem de stationære punkter for f , og tegn grafen for f .

VEND!

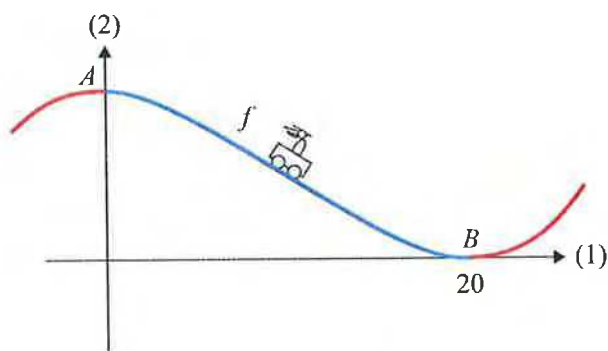
Opgave 16 En tank indeholder 200 liter saltopløsning. En saltopløsning, der indeholder 1,1 gram salt pr. liter, pumpes ind i tanken med en hastighed på 3 liter pr. minut. Samtidigt pumpes den blandede saltopløsning ud med samme hastighed, således at væskemængden i tanken bevares. Under hele processen omrøres blandingen i tanken, således at saltkoncentrationen til et givet tidspunkt kan antages at være den samme overalt i tanken. Lad S betegne saltmængden i tanken (målt i gram), og lad t betegne tiden, der er gået fra pumpeprocessens start (målt i minutter).

a) Gør rede for, at S som funktion af t opfylder differentialligningen

$$\frac{dS}{dt} = 3 \cdot 1,1 - \frac{3}{200} \cdot S.$$

b) Bestem S som funktion af t , idet det oplyses, at der fra start var 20 gram salt i tanken.

Opgave 17



En funktion f er bestemt ved

$$f(x) = a \cdot x^3 + b \cdot x^2 + c \cdot x + 7.$$

Ved design af en rutsjebane skal en del af rutsjebanen have form som den del af grafen for f , der ligger mellem punkterne A og B . Rutsjebanen skal være vandret i punkterne A og B . Endvidere skal rutsjebanen røre jorden i punktet B .

a) Bestem a , b og c .



**MINISTERIET FOR
BØRN OG
UNDERVISNING**
KVALITETS- OG
TILSYNSSTYRELSEN

Matematik A

Studentereksamen

Opgavesættet er delt i to dele.

Delprøven uden hjælpemidler består af opgave 1-6 med i alt 6 spørgsmål.
Delprøven med hjælpemidler består af opgave 7-15 med i alt 19 spørgsmål.

De 25 spørgsmål indgår med lige vægt i bedømmelsen.

Bedømmelsen af det skriftlige eksamenssæt

I bedømmelsen af besvarelsen af de enkelte spørgsmål og i helhedsindtrykket vil der blive lagt vægt på, om eksaminandens tankegang fremgår klart af besvarelsen. Dette vurderes blandt andet ud fra kravene beskrevet i de følgende fem kategorier:

1. TEKST

Besvarelsen skal indeholde en forbindende tekst fra start til slut, der giver en klar præsentation af, hvad den enkelte opgave og de enkelte delspørgsmål går ud på.

2. NOTATION OG LAYOUT

Der kræves en hensigtsmæssig opstilling af besvarelsen i overensstemmelse med god matematisk skik, herunder en redegørelse for den matematiske notation, der indføres og anvendes, og som ikke kan henføres til standardviden.

3. REDEGØRELSE OG DOKUMENTATION

Besvarelsen skal indeholde en redegørelse for den anvendte fremgangsmåde og dokumentation i form af et passende antal mellemregninger og/eller en matematisk forklaring på brugen af de forskellige faciliteter, som et værktøjsprogram tilbyder.

4. FIGURER

I besvarelsen skal der indgå en hensigtsmæssig brug af figurer og illustrationer, og der skal være en tydelig sammenhæng mellem tekst og figurer.

5. KONKLUSION

Besvarelsen skal indeholde en afrunding af de forskellige spørgsmål med præcise konklusioner, præsenteret i et klart sprog og/eller med brug af almindelig matematisk notation.

Delprøven uden hjælpemidler

Kl. 09.00 – 10.00

Opgave 1 En linje l har parameterfremstillingen

$$l: \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Bestem en ligning for den linje m , der går gennem punktet $(3,4)$ og er vinkelret på l .

Opgave 2 Tre eksponentialfunktioner f , g og h er givet ved

$$f(x) = 2^x$$

$$g(x) = 3^x$$

$$h(x) = \frac{g(x)}{f(x)}.$$

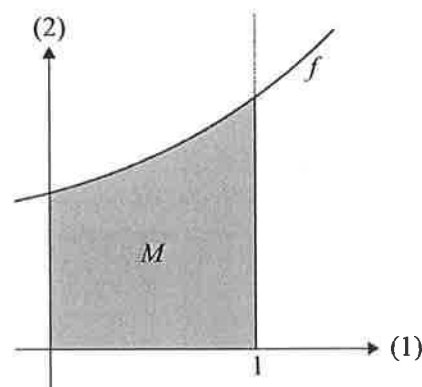
Bestem fremskrivningsfaktoren for funktionen h .

Opgave 3 En funktion f er bestemt ved

$$f(x) = e^x + 2.$$

Grafen for f , de to koordinataksler og linjen med ligningen $x=1$ afgrænser i 1. kvadrant en punktmængde M (se figur).

Bestem arealet af M .



Opgave 4 For en kugle med radius r og volumen V gælder, at $V = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot r^3$.
En bestemt kugle har rumfanget $\frac{32}{3} \cdot \pi$.

Bestem radius for denne kugle.

Opgave 5 En funktion f er bestemt ved

$$f(x) = x^3 - \frac{3}{2}x^2 - 6x + 7.$$

Bestem monotoniforholdene for f .

Opgave 6 En funktion f er løsning til differentialligningen

$$\frac{dy}{dx} = 3y + 5.$$

Grafen for f går gennem punktet $P(1, 4)$.

Bestem en ligning for tangenten til grafen for f i punktet P .

Besvarelsen afleveres kl. 10.00
--

Delprøven med hjælpemidler

Kl. 09.00 – 14.00

Opgave 7

Nedenstående tabel viser en opgørelse over det årlige antal reklametimer, der blev vist på de danske tv-kanaler i perioden 2000-2010.

År	2000	2005	2008	2009	2010
Reklametimer	4963	8249	10296	12459	13661

I en model kan udviklingen i det årlige antal reklametimer på de danske tv-kanaler beskrives ved

$$f(t) = b \cdot a^t,$$

hvor $f(t)$ er det årlige antal reklametimer på de danske tv-kanaler, og t er antal år efter 2000.

- Benyt tabellens data til at bestemme a og b .
- Bestem den tid, der går, før det årlige antal reklametimer er fordoblet.
- Bestem $f'(6)$, og giv en fortolkning af dette tal.

Opgave 8

I et koordinatsystem i planen er to vektorer $\vec{a}$ og $\vec{b}$ givet ved

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} -3 \\ 7 \end{pmatrix} \text{ og } \vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \end{pmatrix}.$$

- Bestem vinklen mellem $\vec{a}$ og $\vec{b}$.
- Bestem arealet af den trekant, der udspændes af $\vec{a}$ og $\vec{b}$.

Opgave 9 I en model kan den årlige affaldsproduktion i EU pr. indbygger beskrives ved funktionen

$$w(t) = \frac{519,9}{1 + 0,098 \cdot e^{-0,434t}}$$

hvor $w(t)$ betegner den årlige affaldsproduktion pr. indbygger (målt i kg) til tiden t (målt i år efter 1994).

- a) Benyt modellen til at bestemme, hvor mange kg affald en EU-borger producerede i 1994.

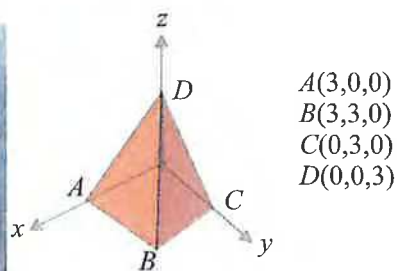
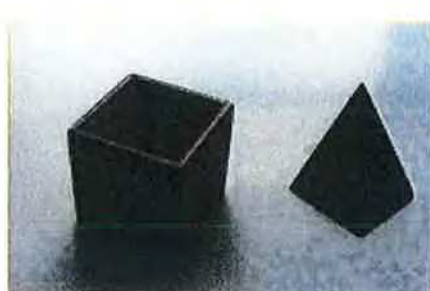
I en rapport fra EU hedder det:

Produktionen af kommunalt affald i EU er aftaget og har stabiliseret sig på omkring 520 kg pr. indbygger siden 2002.

- b) Tegn grafen for w , og gør rede for, hvordan modellen understøtter denne påstand.

Kilde: *Environment and energy, Eurostat, Statistics in focus*, 31/2011.

Opgave 10 I et stykke legetøj går det ud på at samle tre pyramider, så de danner en kube. Figuren viser en model af en af de tre pyramider.



- a) Bestem ligningen for den plan α , som fladen ABD er del af.

Det oplyses, at den plan β , som fladen BCD er en del af, har ligningen

$$y + z = 3.$$

- b) Bestem den spidse vinkel mellem fladen ABD og fladen BCD .

Opgave 11

En forsker vil undersøge, om en persons efterlønsalder er uafhængig af, om personen lever sammen med en partner eller ej. Derfor udtages der en tilfældig stikprøve på 253 personer med følgende resultat:

Efterlønsalder Lever sammen med en partner	60 år	61-65 år
Ja	28	62
Nej	73	90

- Formulér forskerens nulhypotese, og opstil med udgangspunkt heri en tabel over de forventede værdier.
- Afgør på et 5% signifikansniveau, om nulhypotesen kan forkastes.

Opgave 12

På billedet ses Golden Gate Bridge indlagt i et koordinatsystem med enheden meter på begge akser. Koordinatsystemets nulpunkt ligger ved vandoverfladen hos den nordlige pylon til venstre i billedet. Bærekablets monteringspunkter på de to pyloner ligger 220 m over vandoverfladen, og kablets laveste punkt er 80 m over vandoverfladen. Afstanden mellem monteringspunkterne er 1280 m.

I en model beskrives bærekablet mellem de to pyloner ved en del af grafen for et andengradspolynomium:

$$f(x) = ax^2 + bx + c.$$

- Bestem en forskrift for f .

Det oplyses, at buelængden af grafen for en funktion $f(x)$ i intervallet $[x_1; x_2]$ er givet ved

$$\int_{x_1}^{x_2} \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx.$$

- Benyt modellen til at bestemme længden af bærekablet mellem de to pyloner.



Kilde: wikipedia commons

Opgave 13

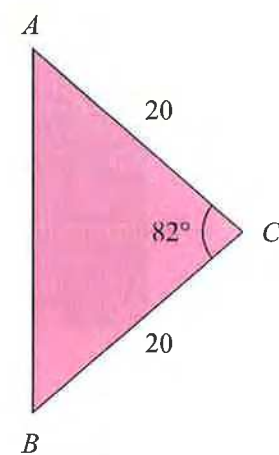


I en model for koncentrationen af et bestemt rygestopmiddel i blodet hos en person er koncentrationen $c(t)$ (målt i $\mu\text{g} / \text{L}$) som funktion af tiden t (målt i timer efter indtagelsen af stoffet) en løsning til differentialligningen

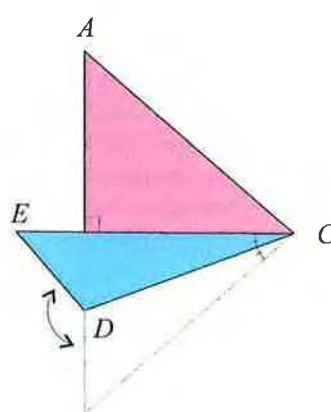
$$c' = -0,035 \cdot c.$$

- Hvor hurtigt aftager koncentrationen af rygestopmidlet, når koncentrationen i blodet er på $1,5 \mu\text{g} / \text{L}$?
- Bestem en forskrift for $c(t)$, når det oplyses, at koncentrationen af rygestopmidlet er $2,0 \mu\text{g} / \text{L}$ til tidspunktet $t=0$.

Opgave 14



Figur 1



Figur 2

Et stykke karton har form som en ligebeinet trekant, hvor de lige ben er 20 cm lange, som vist på figur 1.

- Bestem $|AB|$, og bestem vinkel A .

Kartonstykket foldes til en silhuet af et lille sejlskib, som vist på figur 2. Foldningen sker langs en linje CD , således at B føres over i E .

- Bestem $|DC|$, og bestem arealet af trekant CDE .

Opgave 15



To funktioner f og g er bestemt ved

$$f(x) = -0,15x^2 + 2,205x - 0,858$$

$$g(x) = -0,12x^2 + 1,3x + 4,2$$

Graferne for f og g afgrænser sammen med koordinatsystemets akser i første kvadrant et område M , hvor $g(x) \geq f(x)$.

En træskål har form som det omdrejningslegeme, der fremkommer, når M roteres 360° om førsteaksen. Enheden på begge akser er cm.

- Tegn graferne for f og g , og bestem skålens højde.
- Hvor stort er rumfanget af det træ, der udgør skålen?





MINISTERIET FOR
BØRN OG
UNDERVISNING
KVALITETS- OG
TILSYNSSTYRELSEN

Matematik B

Studentereksamen

Onsdag den 14. august 2013
kl. 9.00 - 13.00

Opgavesættet er delt i to dele.

Delprøven uden hjælpemidler består af opgave 1-6 med i alt 6 spørgsmål.
Delprøven med hjælpemidler består af opgave 7-13 med i alt 14 spørgsmål.

De 20 spørgsmål indgår med lige vægt i bedømmelsen.

Bedømmelsen af det skriftlige eksamenssæt

I bedømmelsen af besvarelsen af de enkelte spørgsmål og i helhedsindtrykket vil der blive lagt vægt på, om eksaminandens tankegang fremgår klart af besvarelsen. Dette vurderes blandt andet ud fra kravene beskrevet i de følgende fem kategorier:

1. TEKST

Besvarelsen skal indeholde en forbindende tekst fra start til slut, der giver en klar præsentation af, hvad den enkelte opgave og de enkelte delspørgsmål går ud på.

2. NOTATION OG LAYOUT

Der kræves en hensigtsmæssig opstilling af besvarelsen i overensstemmelse med god matematisk skik, herunder en redegørelse for den matematiske notation, der indføres og anvendes, og som ikke kan henføres til standardviden.

3. REDEGØRELSE OG DOKUMENTATION

Besvarelsen skal indeholde en redegørelse for den anvendte fremgangsmåde og dokumentation i form af et passende antal mellemregninger og/eller en matematisk forklaring på brugen af de forskellige faciliteter, som et værktøjsprogram tilbyder.

4. FIGURER

I besvarelsen skal der indgå en hensigtsmæssig brug af figurer og illustrationer, og der skal være en tydelig sammenhæng mellem tekst og figurer.

5. KONKLUSION

Besvarelsen skal indeholde en afrunding af de forskellige spørgsmål med præcise konklusioner, præsenteret i et klart sprog og/eller med brug af almindelig matematisk notation.

Delprøven uden hjælpemidler

Kl. 09.00 – 10.00

Opgave 1 Reducér udtrykket $(p - q)^2 + 2pq - q^2$.

Opgave 2 I en internetbutik er prisen for en bestemt vare 45 kr. pr. enhed. Enhver ordre på et antal enheder af varen pålægges et forsendelsesgebyr på 100 kr.

Indfør passende variable, og opstil et regneudtryk, der beskriver sammenhæng mellem ordrens samlede pris og antallet af købte enheder af varen.

Opgave 3 Løs andengradsligningen $x^2 - 8x + 7 = 0$.

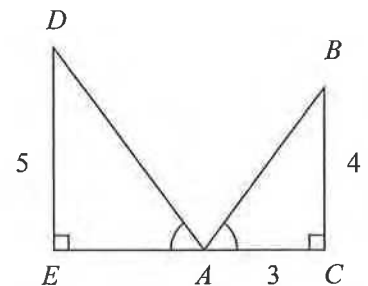
Opgave 4 En funktion f er bestemt ved

$$f(x) = e^x + x^2.$$

Bestem $f'(x)$.

Opgave 5 På figuren ses to ensvinklede og retvinklede trekanter ABC og ADE . Nogle af sidelængderne er angivet på figuren.

Bestem $|AB|$, og bestem omkredsen af trekant ADE .



Opgave 6 Bestem integralet $\int_0^2 (9x^2 + 3) dx$.

Besvarelsen afleveres kl. 10.00

Delprøven med hjælpemidler

Kl. 09.00 – 13.00

Opgave 7 Tabellen viser den årlige affaldsproduktion fra danske husholdninger i perioden 1994-2008.

Årstal	1994	1996	1998	2000	2002	2004	2006	2008
Affaldsproduktion (tons)	2575	2767	2796	3084	3121	3164	3298	3654

I en model antages det, at den årlige affaldsproduktion fra danske husholdninger kan beskrives ved en model af typen

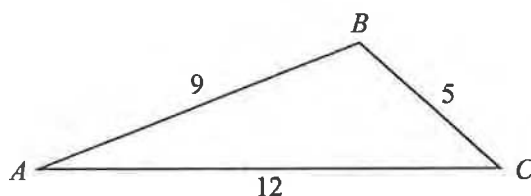
$$w(t) = b \cdot a^t,$$

hvor $w(t)$ betegner den årlige affaldsproduktion fra danske husholdninger (målt i tons) til tiden t (målt i år efter 1994).

- Benyt tabellens data til at bestemme a og b .
- Benyt modellen til at bestemme den årlige affaldsproduktion fra danske husholdninger i 2005, og bestem det år, hvor den årlige affaldsproduktion fra danske husholdninger var 3500 tons.
- Benyt modellen til at bestemme den årlige affaldsproduktion fra danske husholdninger i 2009, og vurder modellens rækkevidde ud fra en sammenligning af den fundne værdi og den faktiske værdi, som var 3437 tons.

Kilde: Affaldsstatistik 2009 og Fremskrivning af affaldsmængder 2011-2050, Orientering fra Miljøstyrelsen Nr. 4 2011.

Opgave 8



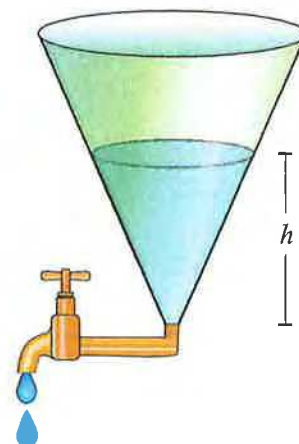
I trekant ABC er $a = 5$, $b = 12$ og $c = 9$.

- Bestem vinkel A .
- Bestem længden af medianen fra B .

- Opgave 9** I en model for tømning af væske fra en bestemt beholder kan væskehøjden h (målt i cm) som funktion af tiden t (målt i sekunder) beskrives ved

$$h(t) = (3128 - 40 \cdot t)^{0,4}, \quad 0 \leq t \leq 78,2.$$

- Bestem væskehøjden i beholderen efter 20 sekunder, og bestem hvornår væskehøjden i beholderen er 5 cm.
- Bestem $h'(20)$, og giv en fortolkning af dette tal.



- Opgave 10** En funktion f er bestemt ved

$$f(x) = 0,25x^4 - 3x^3 + 12x^2 - 16x.$$

- Bestem en ligning for tangenten til grafen for f i punktet $P(5, f(5))$.
- Bestem monotoniforholdene for f .

- Opgave 11** To funktioner f og g er givet ved

$$f(x) = 3 \cdot (x+1)^{0,5}, \quad x \geq -1$$

$$g(x) = x + 1$$

Graferne for f og g afgrænser i første og anden kvadrant en punktmængde M , der har et areal.

- Tegn graferne for f og g , og bestem arealet af M .

- Opgave 12** Karakterfordelingen ved folkeskolens 9. classes afgangsprøve i matematik sommeren 2011 var som vist i tabellen.

Karakter	-3	00	02	4	7	10	12
Andel	0,14%	7,43%	10,96%	22,04%	31,23%	19,83%	8,37%

I en stikprøve fra 2012 blandt landets 9. classes elever var karakterfordelingen således:

Karakter	-3	00	02	4	7	10	12
Antal elever	30	68	124	198	279	225	76

Man ønsker at undersøge nulhypotesen:

Karakterfordelingen blandt 9. classes elever i 2012 er den samme som karakterfordelingen fra 2011.

- Beregn med udgangspunkt i nulhypotesen den forventede karakterfordeling for eleverne i stikprøven.
- Undersøg på et 5% signifikansniveau, om nulhypotesen må forkastes.

- Opgave 13** I en model kan en virksomheds omkostninger ved produktion af en bestemt vare beskrives ved funktionen

$$O(x) = 0,0005 \cdot x^3 - 0,8 \cdot x^2 + 837 \cdot x + 35200, \quad x > 0,$$

hvor $O(x)$ betegner omkostningerne (målt i kr.) ved produktion af x enheder af varen. Enhedsomkostningerne $E(x)$ (målt i kr. pr. enhed) ved produktion af x enheder er bestemt ved

$$E(x) = \frac{O(x)}{x}.$$

- Bestem en regneforskrift for $E(x)$, og bestem $E(2000)$.

Det oplyses, at enhedsomkostningerne bliver mindst mulige, når $E(x) = O'(x)$.

- Bestem det antal enheder af varen virksomheden skal producere, for at enhedsomkostningerne bliver mindst mulige.





**UNDERVISNINGS
MINISTERIET**
KVALITETS- OG
TILSYNSSTYRELSEN

Matematik A

Studentereksamen

Opgavesættet er delt i to dele.

Delprøven uden hjælpemidler består af opgave 1-6 med i alt 6 spørgsmål.
Delprøven med hjælpemidler består af opgave 7-15 med i alt 19 spørgsmål.

De 25 spørgsmål indgår med lige vægt i bedømmelsen.

Bedømmelsen af det skriftlige eksamenssæt

I bedømmelsen af besvarelsen af de enkelte spørgsmål og i helhedsindtrykket vil der blive lagt vægt på, om eksaminandens tankegang fremgår klart af besvarelsen. Dette vurderes blandt andet ud fra kravene beskrevet i de følgende fem kategorier:

1. TEKST

Besvarelsen skal indeholde en forbindende tekst fra start til slut, der giver en klar præsentation af, hvad den enkelte opgave og de enkelte delspørgsmål går ud på.

2. NOTATION OG LAYOUT

Der kræves en hensigtsmæssig opstilling af besvarelsen i overensstemmelse med god matematisk skik, herunder en redegørelse for den matematiske notation, der indføres og anvendes, og som ikke kan henføres til standardviden.

3. REDEGØRELSE OG DOKUMENTATION

Besvarelsen skal indeholde en redegørelse for den anvendte fremgangsmåde og dokumentation i form af et passende antal mellemregninger og/eller en matematisk forklaring på brugen af de forskellige faciliteter, som et værktøjsprogram tilbyder.

4. FIGURER

I besvarelsen skal der indgå en hensigtsmæssig brug af figurer og illustrationer, og der skal være en tydelig sammenhæng mellem tekst og figurer.

5. KONKLUSION

Besvarelsen skal indeholde en afrunding af de forskellige spørgsmål med præcise konklusioner, præsenteret i et klart sprog og/eller med brug af almindelig matematisk notation.

Delprøven uden hjælpemidler

Kl. 09.00 – 10.00

Opgave 1 Grafen for en lineær funktion f går igennem de to punkter $(-3,1)$ og $(5,17)$.

Bestem en forskrift for f .

Opgave 2 To vektorer $\vec{a}$ og $\vec{b}$ er givet ved

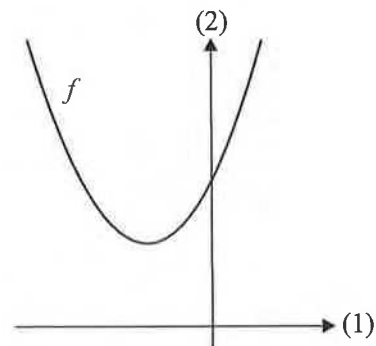
$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix} \text{ og } \vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \end{pmatrix}.$$

Bestem arealet af parallelogrammet udspændt af $\vec{a}$ og $\vec{b}$.

Opgave 3 På figuren ses en parabel, der er graf for et andengradspolynomium givet ved

$$f(x) = ax^2 + bx + c.$$

Gør rede for, at tallene a , b og c er positive, samt at andengradspolynomiets diskriminant er negativ.



Opgave 4 En funktion f er givet ved

$$f(x) = 4 - 3x^2.$$

Bestem en forskrift for den stamfunktion til f , hvis graf går gennem punktet $P(2,5)$.

Opgave 5 En funktion f er givet ved

$$f(x) = x^3 + 3x^2 - 9x + 16.$$

Bestem monotoniforholdene for f .

Opgave 6 På figuren ses en linje l , der har ligningen

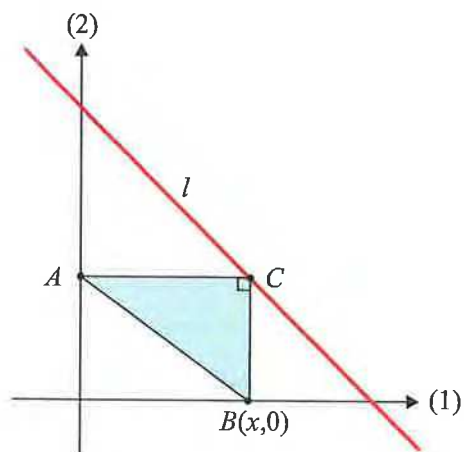
$$y = 4 - x.$$

Endvidere ses en retvinklet trekant ABC , hvor vinkel C er ret. Det oplyses, at C ligger på l , og at AC er parallel med førsteaksen.

Gør rede for, at arealet T af trekant ABC udtrykt ved x er givet ved

$$T(x) = \frac{1}{2} \cdot x \cdot (4 - x),$$

og bestem x , så arealet bliver størst muligt, idet $0 < x < 4$.



Besvarelsen afleveres kl. 10.00

Delprøven med hjælpemidler

Kl. 09.00 – 14.00

Opgave 7 Tabellen viser udviklingen i antallet af næsehorn dræbt af krybskytter i Sydafrika i perioden 2004-2012.

Årstal	2004	2005	2006	2007	2008	2009	2010	2011	2012
Antal dræbte næsehorn	10	13	24	13	83	122	333	448	668

I en model kan udviklingen i antallet af næsehorn dræbt af krybskytter i Sydafrika beskrives ved en funktion af typen

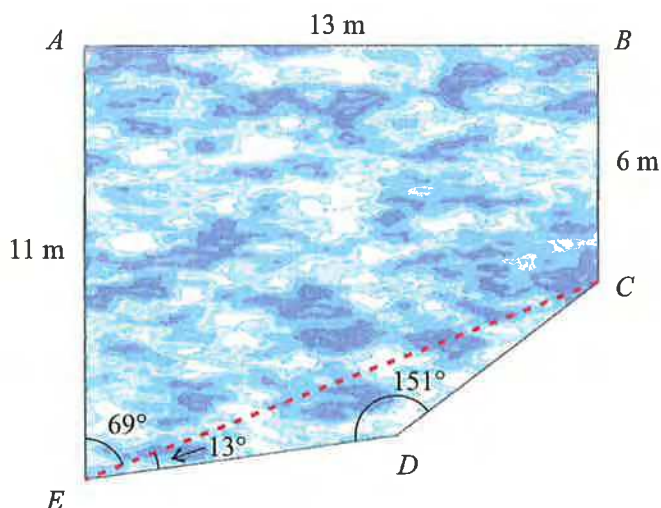
$$N(t) = b \cdot a^t,$$

hvor $N(t)$ betegner antallet af dræbte næsehorn til tidspunktet t (målt i år efter 2004).

- Benyt tabellens data til at bestemme en forskrift for N .
- Gør rede for, hvad værdien af a fortæller om udviklingen i antallet af dræbte næsehorn.
- Benyt modellen til at give et skøn over antallet af dræbte næsehorn i 2013, hvis udviklingen fortsætter.

Kilde: www.traffic.org

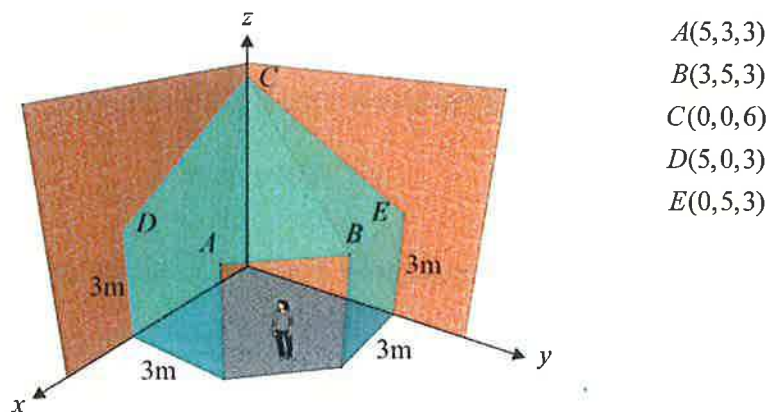
Opgave 8



Figuren viser et svømmebassin, hvor der er udspændt et banetov til afgrænsning af et trekantet område, hvori der opbevares legeredskaber. Alle kendte mål er angivet på figuren.

- Bestem længden af banetovet CE .
- Bestem arealet af det trekantede område CDE , som banetovet afgrænser.

Opgave 9



Figuren viser en model af et vindfang indtegnet i et koordinatsystem, hvor enheden på hver af akserne er meter. Koordinaterne for nogle af vindfangets hjørnepunkter er angivet ovenfor. Vindfangets glastagflader består af tre trekanter, og vindfangets sider består af to kvadratiske glasflader på hver 3m x 3m.

- a) Bestem en ligning for den plan, der indeholder tagfladen ABC .

Det oplyses, at den plan, der indeholder tagfladen ACD , har ligningen

$$9x + 15z - 90 = 0.$$

- b) Bestem den stumpe vinkel mellem tagfladerne ACD og ABC .
- c) Bestem vindfangets samlede glasareal.

Opgave 10

I en matematisk model kan udviklingen i antallet af guppyer i et bestemt akvarium beskrives ved differentialligningen

$$\frac{dP}{dt} = 0,0015 \cdot P \cdot (150 - P),$$

hvor P betegner antallet af guppyer i akvariet til tiden t (målt i uger).

Det oplyses, at der fra start sættes i alt 12 guppyer af forskelligt køn ned i akvariet.

- a) Bestem en forskrift for P , og bestem den tid t , der går, før akvariet indeholder 80 guppyer.
- b) Tegn grafen for P i et passende interval, og bestem den øvre grænse for antallet af guppyer i akvariet.
- c) Bestem det tidspunkt, hvor væksthastigheden for antallet af guppyer i akvariet er størst.

Opgave 11



I en model for en taperulle kan længden af tape på rullen $L(n)$ som funktion af antallet n af viklinger tape på rullen beskrives ved

$$L(n) = \pi \cdot d \cdot n^2 + 2 \cdot \pi \cdot r_0 \cdot n,$$

hvor d er tykkelsen af tapen, og r_0 er radius af den tomme rulle.

For en bestemt type taperulle er tykkelsen af tapen $d = 0,1$ mm, og radius af den tomme rulle er $r_0 = 25$ mm.

- Bestem længden af tape på rullen, når der er 75 viklinger tape på rullen.
- Bestem antallet af viklinger tape på rullen, når længden af tape er 50000 mm.

Opgave 12

Spændingsfaldet over et batteri i motoren i et styret missil ændres afhængigt af missilets bevægelser. I en matematisk model kan spændingsfaldet over batteriet i et bestemt styret missil beskrives ved

$$f(t) = -0,0033 \cdot t^3 + 0,0340 \cdot t^2 + 0,7032 \cdot t + 6,4910, \quad 0 \leq t \leq 20$$

hvor $f(t)$ er spændingsfaldet over batteriet (målt i V) til tidspunktet t (målt i sekunder efter affyring).

- Tegn grafen for f , og bestem de to tidspunkter, hvor spændingsfaldet over batteriet er 12 V.
- Bestem $f'(15)$, og gør rede for betydningen af dette tal.

Kilde: *Introduction to Linear Regression Analysis*, Douglas C. Montgomery, Elizabeth A. Peck, G. Geoffrey Vining, John Wiley & Sons, 2012.

Opgave 13 Tabellen viser aldersfordelingen af 165 tilfældigt udvalgte 20-70-årige danskere.

Alder	20-30	30-40	40-50	50-60	60-70
Antal	21	39	51	30	24

Aldersfordelingen af alle 20-70-årige danskere fremgår af nedenstående tabel.

Alder	20-30	30-40	40-50	50-60	60-70
Antal i %	18,1	20,3	22,6	20,0	19,0

Man ønsker at undersøge, om aldersfordelingen blandt de tilfældigt udvalgte danskere er den samme som aldersfordelingen blandt alle 20-70-årige danskere.

- a) Opstil en nulhypotese, og undersøg, om nulhypotesen kan forkastes på et 5% signifikansniveau.

Opgave 14 To funktioner f og g er givet ved

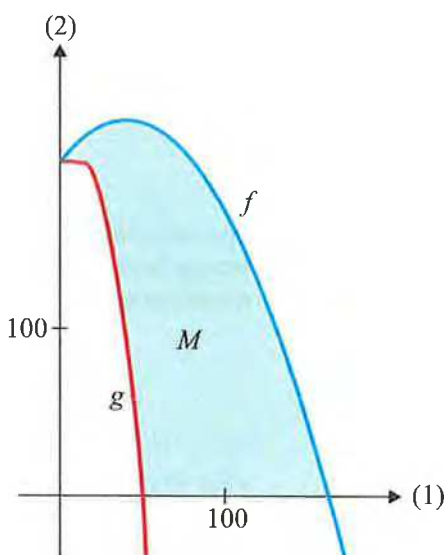
$$f(x) = -0,015625x^2 + 1,25x + 200, \quad x \geq 0$$

$$g(x) = 200 - 0,000032x^4, \quad x \geq 0.$$

- a) Bestem nulpunktet for hver af de to funktioner f og g .

Gavlen på et buskur har form som det område M , der afgrænses af graferne for f og g samt førsteaksen i første kvadrant (se skitse). Enheden på hver af akserne er cm.

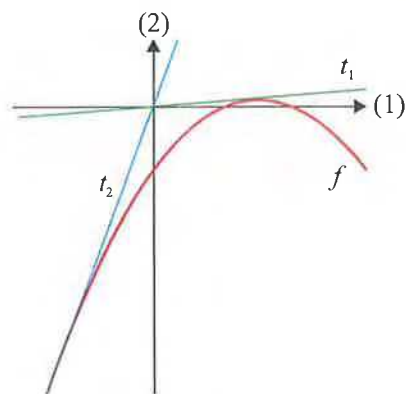
- b) Bestem arealet af buskurets gavl.



Opgave 15 En funktion f er bestemt ved

$$f(x) = -x^2 + 3x - 2.$$

Grafen for f har netop to tangenter t_1 og t_2 , der går gennem punktet $(0,0)$.



a) Bestem en ligning for hver af disse tangenter.





**UNDERVISNINGS
MINISTERIET**
KVALITETS- OG
TILSYNSSTYRELSEN

Matematik B

Studentereksamen

Fredag den 6. december 2013
kl. 9.00 - 13.00

Opgavesættet er delt i to dele.

Delprøven uden hjælpemidler består af opgave 1-6 med i alt 6 spørgsmål.
Delprøven med hjælpemidler består af opgave 7-13 med i alt 14 spørgsmål.

De 20 spørgsmål indgår med lige vægt i bedømmelsen.

Bedømmelsen af det skriftlige eksamenssæt

I bedømmelsen af besvarelsen af de enkelte spørgsmål og i helhedsindtrykket vil der blive lagt vægt på, om eksaminandens tankegang fremgår klart af besvarelsen. Dette vurderes blandt andet ud fra kravene beskrevet i de følgende fem kategorier:

1. TEKST

Besvarelsen skal indeholde en forbindende tekst fra start til slut, der giver en klar præsentation af, hvad den enkelte opgave og de enkelte delspørgsmål går ud på.

2. NOTATION OG LAYOUT

Der kræves en hensigtsmæssig opstilling af besvarelsen i overensstemmelse med god matematisk skik, herunder en redegørelse for den matematiske notation, der indføres og anvendes, og som ikke kan henføres til standardviden.

3. REDEGØRELSE OG DOKUMENTATION

Besvarelsen skal indeholde en redegørelse for den anvendte fremgangsmåde og dokumentation i form af et passende antal mellemregninger og/eller en matematisk forklaring på brugen af de forskellige faciliteter, som et værktøjsprogram tilbyder.

4. FIGURER

I besvarelsen skal der indgå en hensigtsmæssig brug af figurer og illustrationer, og der skal være en tydelig sammenhæng mellem tekst og figurer.

5. KONKLUSION

Besvarelsen skal indeholde en afrunding af de forskellige spørgsmål med præcise konklusioner, præsenteret i et klart sprog og/eller med brug af almindelig matematisk notation.

Delprøven uden hjælpemidler

Kl. 09.00 – 10.00

Opgave 1 Løs ligningen $3x - 7 = 5$.

Opgave 2 En funktion f er bestemt ved

$$f(x) = x^3 - 2x + 6.$$

Bestem $f'(2)$.

Opgave 3 I en model for befolkningstilvæksten i Indien antages det, at

$$N(t) = 1134 \cdot 1,014^t,$$

hvor $N(t)$ betegner befolkningstallet (målt i millioner) til tidspunktet t (målt i antal år efter 2005).

Beskriv, hvad tallene 1134 og 1,014 fortæller om udviklingen i befolkningstallet i Indien.

Opgave 4 Et andengradspolynomium f er bestemt ved

$$f(x) = ax^2 + bx + c.$$

Grafen for f er en parabel.

Tegn en skitse af en mulig graf for f , når det oplyses, at diskriminanten er negativ, a er positiv, og c er positiv.

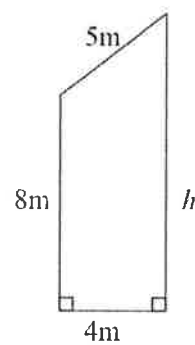
Opgave 5 En funktion f er bestemt ved

$$f(x) = 6x^2 - 2x.$$

Bestem en forskrift for den stamfunktion til f , hvis graf går gennem punktet $P(1,10)$.

Opgave 6 Figuren viser gavlen af et hus. Nogle af husets mål er angivet på figuren.

Bestem højden h af gavlen, og bestem gavlens areal.



Besvarelsen afleveres kl. 10.00

Delprøven med hjælpemidler

Kl. 09.00 – 13.00

Opgave 7



I Vestgrønland har man målt den årlige middeltemperatur på forskellige breddegrader.

Nordlig breddegrad	62	64	70	73	78
Årlig middeltemperatur i °C	1,0	−1,6	−4,2	−7,2	−11,4

I en matematisk model kan sammenhængen mellem den årlige middeltemperatur og breddegraden beskrives ved

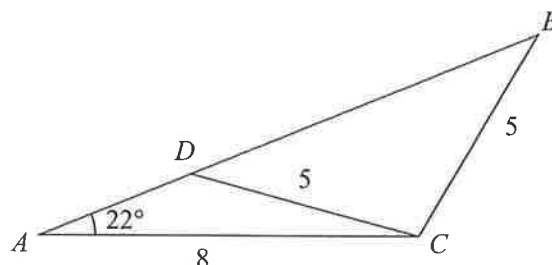
$$f(x) = a \cdot x + b,$$

hvor $f(x)$ er den årlige middeltemperatur i Vestgrønland (målt i °C), og x er den nordlige breddegrad.

- Benyt tabellens data til at bestemme a og b .
- Giv en fortolkning af konstanten a , og benyt modellen til at bestemme den årlige middeltemperatur i Vestgrønland, når den nordlige breddegrad er 66 grader.
- Benyt modellen til at bestemme den nordlige breddegrad, hvor den årlige middeltemperatur i Vestgrønland er -10°C .

Kilde: Klimaforandringer i Arktis, Jesper Ruggaard Mebus og Svend Erik Nielsen, Biofag nr. 6, 2012/særnummer.

Opgave 8



Figuren viser to trekanter ABC og ACD , hvor punktet D ligger på siden AB . Det oplyses, at $\angle B$ er spids, og at $\angle D$ i trekant ACD er stump.

- Bestem $\angle B$.
- Bestem $|AD|$, og bestem arealet af trekant ACD .

Opgave 9

En funktion f er givet ved

$$f(x) = b \cdot x^a.$$

Grafen for f går gennem punkterne $P(1,2)$ og $Q(5,7)$.

- Bestem tallene a og b .

Opgave 10

I en matematisk model kan østrogenkoncentrationen efter indtagelse af en p-pille beskrives ved

$$C(t) = 67 \cdot (e^{-0,041t} - e^{-3,1t}), \quad 0 \leq t \leq 36,$$

hvor $C(t)$ er østrogenkoncentrationen i blodet (målt i picogram pr. milliliter) til tidspunktet t (målt i timer) efter indtagelse af en p-pille.

- Tegn grafen for C , og bestem østrogenkoncentrationen i blodet efter 20 timer.
- Bestem, hvor lang tid der går, fra man har indtaget en p-pille, til østrogenkoncentrationen er maksimal.

For at undgå at blive gravid skal der tages en ny p-pille, når østrogenkoncentrationen falder til en værdi under 25 picogram pr. milliliter.

- Benyt modellen til at bestemme, hvor lang tid der går, inden der skal tages en ny p-pille.

Kilde: *Investigating birth control: comparing oestrogen levels in patients using the Ortho Evra patch versus the Ortho-Cyclen pill*, Theresa A. Laurent, *TEACHING MATHEMATICS AND ITS APPLICATIONS*, Volume 27, No. 2, 2008.

Opgave 11 En funktion f er givet ved

$$f(x) = (x - 7) \cdot e^{-x}.$$

- Opstil en ligning for tangenten til grafen for f i punktet $P(2, f(2))$.
- Gør rede for monotoniforholdene for f .

Opgave 12 En caféjer ønsker at undersøge, om den kaffetype, caféens kaffedrikkende kunder vælger, er uafhængig af kundernes nationalitet. Caféjeren udtrækker derfor på tilfældig måde en stikprøve blandt caféens kaffedrikkende kunder. Stikprøvens fordeling på valgt kaffetype og nationalitet fremgår af skemaet.

	Caffe latte	Espresso	Cappuccino
Danske kunder	712	159	218
Udenlandske kunder	251	62	105

- Opstil en nulhypotese, og bestem de forventede værdier.
- Undersøg på et 5% signifikansniveau, om nulhypotesen kan forkastes.

Opgave 13 To funktioner f og g er bestemt ved

$$f(x) = \sqrt{x}$$

$$g(x) = \frac{1}{8}x^2.$$

Graferne for f og g afgrænser i første kvadrant en punktmængde M , der har et areal.

- Tegn graferne for f og g . Bestem arealet af M .





**UNDERVISNINGS
MINISTERIET**
KVALITETS- OG
TILSYNSSTYRELSEN

Matematik A

Studentereksamen

Forberedelsesmateriale til de digitale
eksamensopgaver med adgang til internettet

Forberedelsesmateriale til stx-A-net MATEMATIK

Der skal afsættes 6 timer af holdets sædvanlige uddannelsestid til, at eleverne kan arbejde med forberedelsesmaterialet forud for den skriftlige prøve.

3-5 spørgsmål i delprøve 2 af den skriftlige prøve tager udgangspunkt i det materiale, der findes i dette oplæg. De øvrige spørgsmål omhandler emner fra kernestoffet.

Oplægget indeholder teori, eksempler og øvelser i tilknytning til et emne, der ligger umiddelbart i forlængelse af et kernestofemne.

Resultaterne af arbejdet med dette forberedelsesmateriale bør medbringes til den skriftlige prøve.

Alle hjælpemidler er tilladt, og det er tilladt at modtage vejledning.

Indhold

Indledning.....	3
Linjeelementer	4
Koblede differentiaalligninger	6
Anvendelser af koblede differentiaalligninger	8
Lanchester's model.....	8
Andenordens differentiaalligninger.....	10
Anvendelser af andenordens differentiaalligninger.....	15
Andenordens differentiaalligninger fortsat	15
Anvendelser af andenordens differentiaalligninger fortsat	17
Bilag	20
Koblede differentiaalligninger og faseplot i Maple.....	20
Koblede differentiaalligninger og faseplot i Geogebra	21
Koblede differentiaalligninger og faseplot i NSpire	22

Indledning

Dette forberedelsesmateriale tager udgangspunkt i førsteordens differentialligninger som $y' = ay$, $y' = b - ay$ og $y' = y(b - ay)$, som du forudsættes at være fortrolig med.

I forberedelsesmaterialet er der både øvelser og opgaver. Øvelserne er tænkt som hjælp til forståelse af teorien, herunder beviser for nogle af sætningerne. Opgaverne er tænkt som forberedelse til de opgaver, der kommer til den skriftlige eksamen.

I forberedelsesmaterialet anvendes 5 typer af farvede bokse. De grønne indeholder definitioner, de grå indeholder eksempler, de blå indeholder øvelser, de røde indeholder sætninger og de lilla indeholder opgaver.

Bemærk, at der til eksamen vil blive stillet krav om at tegne faseplot for koblede differentialligninger. I bilagene ligger der vejledninger til, hvordan man anvender værktøjsprogrammerne Geogebra, NSpire og Maple til at tegne disse.

Linjeelementer

Førsteordens differentialligningerne fra kernestoffet som $y' = ay$, $y' = b - ay$ og $y' = y(b - ay)$ kan alle løses eksakt. Der findes også differentialligninger, der ikke kan løses eksakt. Du vil i det følgende møde eksempler på begge typer. Når differentialligninger ikke kan løses eksakt, anvendes derfor andre løsningsmetoder. Disse metoder bygger på, at en differentialligning giver information om tangenthældninger til løsningskurver.

I differentialligningen

$$\frac{dy}{dt} = -\frac{1}{2} \cdot t \cdot y,$$

er højre side en funktion af t og y . Kalder vi denne funktion $s(t, y)$, kan vi opskrive differentialligningen således

$$\frac{dy}{dt} = s(t, y)$$

Hvis en løsningsfunktions graf – herefter kaldet en løsningskurve – går igennem punktet (t_0, y_0) , så vil løsningskurvens tangent i punktet have hældningskoefficienten $\alpha = s(t_0, y_0)$.

De tre størrelser tilsammen: t_0 , y_0 og $s(t_0, y_0)$ kaldes et *linjeelement*. Hermed menes, at vi har et punkt og et lille linjestykke gennem dette punkt med hældningskoefficienten $\alpha = s(t_0, y_0)$. Linjeelementet betegnes $(t_0, y_0; \alpha)$.

Et plot af linjeelementer kaldes *hældningsfeltet*. På baggrund af disse linjeelementer kan man tabellægge en god tilnærmelse til den løsning, der begynder i et bestemt punkt. En sådan løsning kaldes en *numerisk løsning*.

Vi illustrerer med et konkret eksempel, hvorledes linjeelementer kan hjælpe til at få overblik over løsningskurver til differentialligninger.

Eksempel 1 Linjeelementer

Vi vil som et konkret eksempel se på differentialligningen

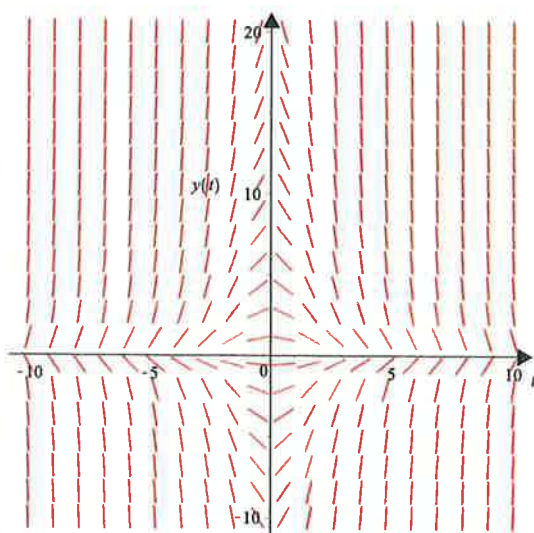
$$\frac{dy}{dt} = -\frac{1}{2} \cdot t \cdot y$$

Vi kan udregne en række linjeelementer hørende til denne differentialligning ved at vælge punkter (t_0, y_0) og indsætte disse i udtrykket på højresiden i differentialligningen. For punktet $(2, 6)$ får vi fx

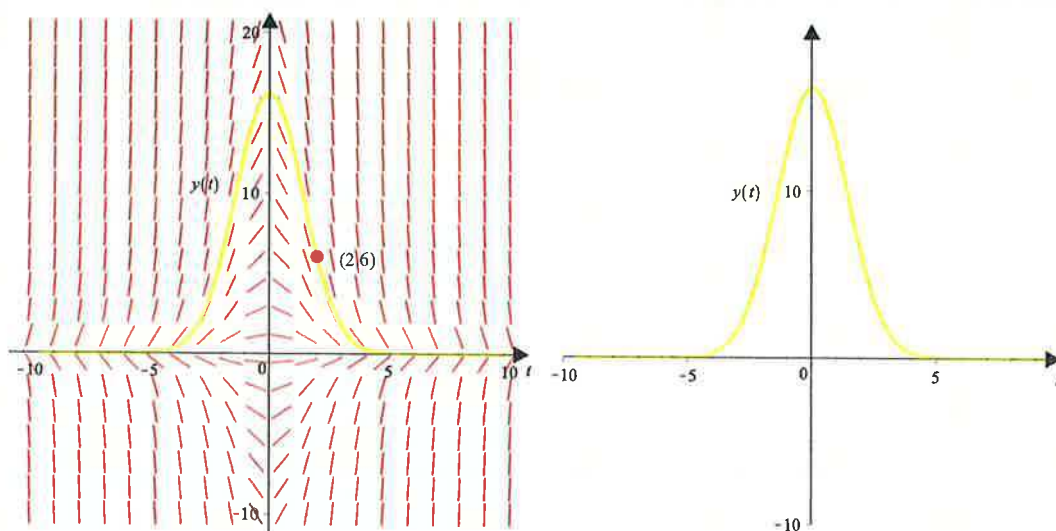
$$\alpha = -\frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 6 = -6$$

dvs. $(2, 6; -6)$ er et linjeelement for differentialligningen. Vi kan på den måde udregne en

række linjeelementer inden for fx grafvinduet $[-10;10] \times [-10;20]$. Vi kan fx udregne tangenthældninger for alle punkter med heltallige koordinatsæt i dette vindue. Det er jo temmelig mange beregninger, men dette kan nemt automatiseres i fx et regneark. Det næste skridt bliver at tegne små tangentstykker svarende til alle disse beregninger – og det er omstændeligt! Heldigvis har de fleste værktøjsprogrammer en indbygget facilitet til netop dette! Anvender vi denne får vi nedenstående plot, hvoraf vi tydeligt kan se konturerne af forskellige løsningskurver:



Vælger vi nu fx begyndelsesværdien $(2,6)$, får vi samtidig beskrevet lige netop den ene løsningskurve, som går gennem dette punkt.



Her er løsningskurven gennem $(2,6)$ tegnet sammen med hældningsfeltet. De fleste værktøjsprogrammer kan også hente løsningskurven, og tegne denne uden det tilhørende hældningsfelt.

I nogle programmer er begyndelsepunktet (svarende til begyndelsesværdien) dynamisk, så når man trækker i det, kan man se, hvordan løsningskurven ændrer sig, eller man kan indskrive flere begyndelsesværdier sammen med den enkelte differentialligning.

Vi har her ikke løst differentialligningen eksakt, men vi har tegnet hældningsfeltet sammen med grafen for en numerisk løsning gennem punktet $(2,6)$.

Opgave 1

Givet differentialligningen

$$\frac{dy}{dt} = t \cdot y^2$$

- Bestem linjeelementet i punktet (3,2).
- Tegn hældningsfeltet i et passende grafvindue sammen med løsningskurven gennem punktet (3,2).

Koblede differentialligninger

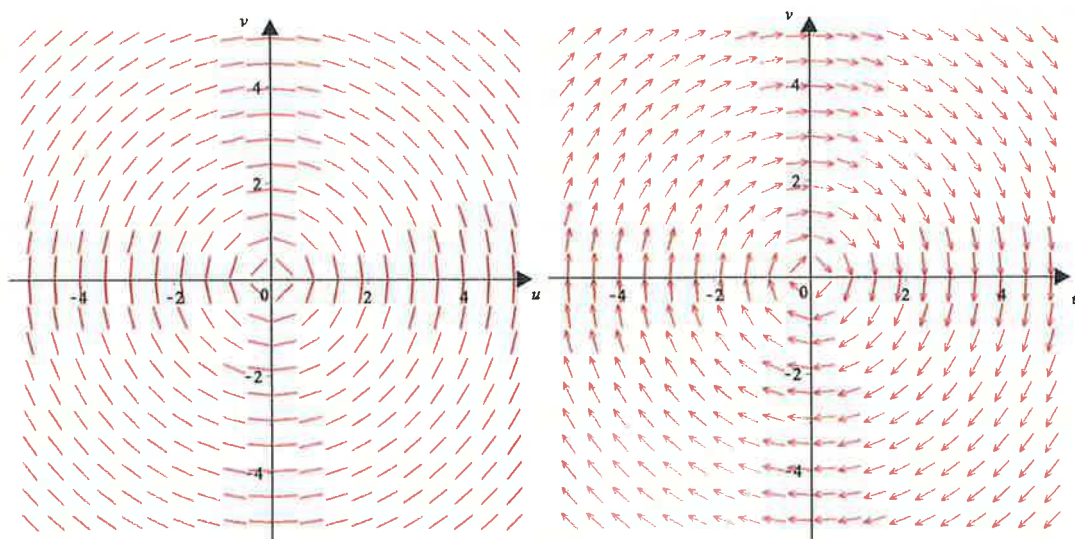
For modeller med flere variable er der et indbyrdes afhængighedsforhold mellem de variable. Sådanne systemer beskrives ved en række sammenhørende differentialligninger. Man kan sammenligne et system af koblede differentialligninger med fx 2 ligninger med to ubekendte, hvor vi har brug for begge ligninger for at kunne bestemme de to ubekendte.

Vi vil se på et system af to koblede differentialligninger

$$\frac{du}{dt} = 2v \text{ og } \frac{dv}{dt} = -2u.$$

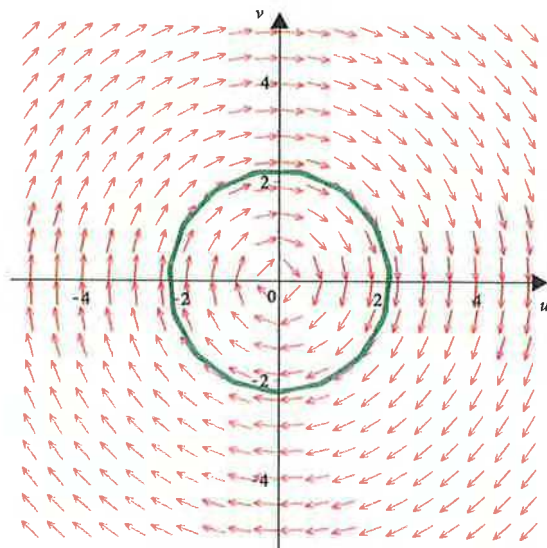
u og v er begge funktioner af t , men sammenkoblingen medfører, at vi ikke umiddelbart kan få tegnet løsningskurver for dem. I stedet vælger vi en anden strategi: Vi betragter u og v som variable og ligningerne som en beskrivelse af variabilsammenhængen mellem dem. Dvs. vi vælger at afsætte u som 1. koordinat og v som 2. koordinat (eller omvendt). Begyndelsesværdierne $u(0) = 2$ og $v(0) = 1$ giver os punktet (2,1) i (u,v) -koordinatsystemet som begyndelsesværdi for en grafisk fremstilling af variabilsammenhængen mellem u og v .

Vi skifter hældningsfeltet ud med et retningsfelt, hvor hvert tangentstykke er erstattet af en vektor, der viser den retning, et punkt (u,v) bevæger sig, når t gennemløber tallinjen.



I punktet $(2,1)$ er $\frac{du}{dt} = 2 \cdot 1$ og $\frac{dv}{dt} = -2 \cdot 2 = -4$. I retningsfeltet vil den pil, der sidder i $(u,v) = (2,1)$ pege i samme retning som vektoren $\begin{pmatrix} 2 \\ -4 \end{pmatrix}$, der derfor er retningsvektor for tangenten i punktet.

Den grafiske fremstilling af sammenhængen mellem de to variable u og v kaldes et *faseplot*.



Her har vi tegnet retningsfeltet for systemet af de koblede differentialligninger

$$\frac{du}{dt} = 2v \quad \text{og} \quad \frac{dv}{dt} = -2u$$

sammen med faseplottet gennem $(u,v) = (2,1)$, der viser sammenhængen mellem u og v .

Bemærk, at højresiden i de to differentialligninger ikke indeholder tidsparameteren t , hvilket er en forudsætning for, at det giver mening at tegne retningsfeltet og faseplottet.

Hvis vi vil undersøge løsningen nøjere, kan vi oversætte systemet af de to koblede differentialligninger til én førsteordens differentialligning ved at anvende reglen om differentiation af sammensat funktion på funktionen $v(u(t))$:

$$\frac{dv}{dt} = \frac{dv}{du} \cdot \frac{du}{dt} \quad \text{giver at} \quad -2u = \frac{dv}{du} \cdot 2v \quad \text{og dermed} \quad \frac{dv}{du} = \frac{-u}{v}.$$

Der kan være problemer med definitionsområdet, men det vil føre for vidt at medtage dette her.

Denne ligning kan vi så løse med begyndelsesbetingelsen $(u,v) = (2,1)$. Differentialligningen løses på sædvanlig vis i et værktøjsprogram:

$$\text{desolve}\left(v' = -\frac{u}{v} \text{ and } v(2) = 1, u, v\right)$$

$$v^2 = 5 - u^2$$

$$u^2 + v^2 = 5$$

Vi ser, at løsningen fremkommer på implicit form, dvs. at udtrykket indeholder de to variable, uden at v er isoleret. Nogle værktøjsprogrammer løser ligningen fuldt ud, sådan at v fremkommer som en funktion af u . Faseplottet er altså en del af en cirkel med centrum i $(0,0)$ og radius $\sqrt{5}$.

Opgave 2 Et system af koblede differentialligningen er givet ved

$$\frac{du}{dt} = -3 \cdot v \quad \text{og} \quad \frac{dv}{dt} = 3 \cdot u$$

- Bestem væksthastighederne i punktet $(u(0), v(0)) = (1, 1)$, dvs. bestem $u'(0)$ og $v'(0)$.
- Tegn retningsfeltet for systemet af koblede differentialligninger.
- Tegn et faseplot, der viser sammenhængen mellem u og v , med begyndelsesbetingelsen $(u(0), v(0)) = (1, 1)$.

Opgave 3 Forklar, hvordan retningsfeltet for systemet af koblede differentialligninger

$$\frac{du}{dt} = -k \cdot v \quad \text{og} \quad \frac{dv}{dt} = k \cdot u$$

ændrer sig for forskellige værdier af k . Brug evt. en skyder for k i dit værktøjsprogram.

Opgave 4 Et system af koblede differentialligninger er givet ved

$$\frac{du}{dt} = -v \quad \text{og} \quad \frac{dv}{dt} = 3 \cdot u$$

Tegn retningsfeltet sammen med et faseplot, når det oplyses, at $u(0) = 65$ og $v(0) = 90$.

Anvendelser af koblede differentialligninger

Lanchester's model

I forbindelse med fx et kampvognsslag, hvor to styrker kæmper mod hinanden, kan antallet af hærenheder, u og v , som funktion af tiden t (målt i dage efter slagets start) modelleres ud fra Lanchester's model. Et eksempel på en sådan model kan være et sæt koblede differentialligninger som

$$u'(t) = -a \cdot v(t)$$

$$v'(t) = -b \cdot u(t)$$

hvor a og b er positive konstanter, der angiver effektiviteten af henholdsvis hærenhederne u og v .

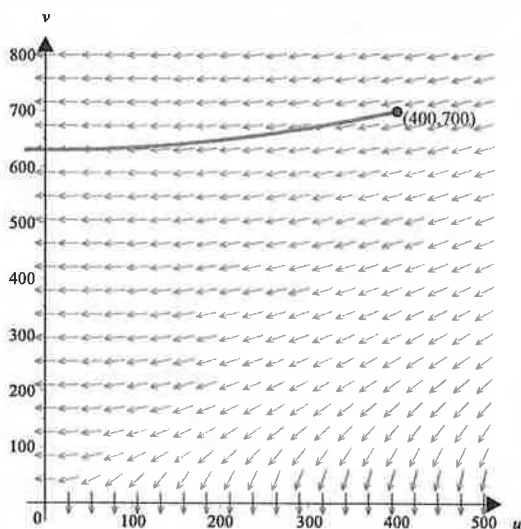
- Opgave 5**
- Antag hærstyrkerne ved slagets begyndelse er på $u(0) = 200$ og $v(0) = 100$ samt at $a = 0,15$ og $b = 0,03$. Udregn væksthastighederne $u'(0)$ og $v'(0)$, og giv et skøn over hærstyrkernes størrelse til tidspunkterne $t = 1$ og $t = 2$.

Eksempel 2 I en Lanchestermode for et slag mellem to hære, kan udviklingen i antallet af hærenheder, u og v , som funktion af tiden t , beskrives ved følgende sæt af koblede differentialligninger

$$\begin{aligned}u'(t) &= -0,12 \cdot v(t) \\v'(t) &= -0,07 \cdot u(t),\end{aligned}$$

Begyndelsesbetingelserne er givet ved $u(0) = 400$ og $v(0) = 700$.

Et retningsfelt i grafvinduet $[0, 500] \times [0, 800]$ kan sammen med faseplottet med de angivne begyndelsesbetingelser se ud som:



Af faseplottet ses at punktet $(400, 700)$ repræsenterer slagets start, og herefter mister begge styrker hærenheder. Slaget ender med at u har 0 hærenheder, mens v har ca. 630 hærenheder. Det konkluderes altså, at hæren u taber, og alle kampvognene er ødelagt, og hæren v vinder med et tab på omkring 70 kampvogne.

Opgave 6 Givet Lanchesters model med parametrene a og b

$$\begin{aligned}u'(t) &= -a \cdot v(t) \\v'(t) &= -b \cdot u(t)\end{aligned}$$

Vi antager først, at $a = 0,15$ og $b = 0,03$.

- Tegn et faseplot for løsningen med begyndelsesbetingelserne $u(0) = 120$ og $v(0) = 300$. Forklar betydningen af faseplottet.
- Tegn et faseplot for løsningen med begyndelsesbetingelserne $u(0) = 250$ og $v(0) = 600$. Forklar betydningen af faseplottet.
- Tegn et faseplot for løsningen, hvor de to hærstyrker er lige store til at begynde med. Forklar betydningen af faseplottet.

Antag nu, at $a = 0,15$ og $b = 0,10$.

- Tegn et faseplot for løsningen med forskellige begyndelsesbetingelser. Sammenlign med faseplottene, hvor $a = 0,15$ og $b = 0,03$.

Andenordens differentialligninger

De systemer af koblede differentialligninger, vi har set på ovenfor, kan omskrives til andenordens differentialligninger, hvor kun u eller v indgår som ubekendt. Dermed kan en eksakt løsning bestemmes.

Opgave 7 Vi ser igen på de to koblede differentialligninger

$$u'(t) = -0,15 \cdot v(t)$$

$$v'(t) = -0,03 \cdot u(t)$$

hvor u og v betegner antallet af hærenheder, som funktion af tiden t (målt i dage efter slagets start).

- Differentier $v'(t) = -0,15 \cdot u(t)$ og vis, at den nye differentialligning kan skrives som $v''(t) = 0,045 \cdot v(t)$.
- Differentier $u'(t) = -0,03 \cdot v(t)$ og vis, at den nye differentialligning kan skrives som $u''(t) = 0,045 \cdot u(t)$.
- Bestem $u'(0)$ og $v'(0)$, når begyndelsesbetingelserne er givet ved $u(0) = 120$ og $v(0) = 300$.
- Bestem de partikulære løsninger, $u(t)$ og $v(t)$, med de givne begyndelsesbetingelser i dit værktøjsprogram.
- Bestem antallet af hærenheder i de to hære efter 5 dage.

Vi har nu fået omskrevet de koblede differentialligninger $u'(t) = -a \cdot v(t)$ og $v'(t) = -b \cdot u(t)$ til to andenordens differentialligninger $u''(t) = k \cdot u(t)$ og $v''(t) = k \cdot v(t)$, hvor konstanten $k = a \cdot b$ er den samme i begge differentialligninger.

Vi ser nu på et mere generelt system af koblede lineære differentialligninger:

$$u'(t) = a \cdot u(t) + b \cdot v(t) + c$$

$$v'(t) = d \cdot u(t) + e \cdot v(t) + f$$

hvor a, b, c, d, e og f er konstanter, og u og v er funktioner af t , som i det følgende blot betegnes med u og v .

Differentialligningerne omskrives nu efter følgende opskrift:

- differentier første ligning
- indsæt anden ligning i det fundne udtryk
- isoler v i første ligning og indsæt også denne i samme udtryk

Proceduren gentages, men nu ved først at differentiere den anden ligning. Herved når man frem til følgende to andenordens differentialligninger:

$$1. \quad u'' - (a + e)u' + (ae - bd)u = bf - ec$$

$$2. \quad v'' - (a + e)v' + (ae - bd)v = dc - af$$

Øvelse 1

- a) Omskriv følgende koblede system til andenordens differentialligninger:

$$u' = 0,5u + v$$

$$v' = -0,75u + 2,5v$$

- b) Udnyt begyndelsesbetingelserne $u(0) = 1$ og $v(0) = 2$ til at udregne begyndelsesbetingelserne for u' og v' .
- c) Løs ligningerne med begyndelsesbetingelserne fra b) i dit værktøjsprogram.

Øvelsen er ikke et *bevis* for, at der er ækvivalens mellem koblede lineære differentialligninger og lineære andenordens differentialligninger. Men beviset følger den samme metode.

I det følgende skal vi se på tre typer af anden ordens differentialligninger samt deres løsninger. De er alle lineære differentialligninger af anden orden, dvs. de kan skrives på formen $y'' + f_1(t) \cdot y' + f_2(t) \cdot y = g(t)$, hvor f_1 , f_2 og g er givne funktioner af én variabel. Hvis $g(t) = 0$ kaldes differentialligningen homogen. Ellers siges ligningen at være inhomogen. Vi vil kun beskæftige os med lineære differentialligninger af anden orden, hvor funktionerne f_1 og f_2 er konstanter.

Vi vil i dette afsnit koncentrere os om følgende typer af andenordens differentialligninger:

$y'' = g(t)$, hvor g er en kontinuert funktion i et interval I ,

$y'' = a \cdot y$, hvor a er en konstant,

$y'' + p \cdot y' + q \cdot y = 0$, hvor p og q er konstanter.

$y'' + p \cdot y' + q \cdot y = k$, hvor p , q og k er konstanter.

For førsteordens differentialligninger går der højst én løsningskurve gennem et givet punkt, dvs. man skal blot kende et punkt på løsningskurven for at bestemme den partikulære løsning til førsteordens differentialligninger. For andenordens differentialligninger er et punkt ikke nok til at bestemme den partikulære løsning. Her skal man kende et linjeelement $(t_0, y_0; \alpha)$, hvorigennem løsningskurven skal passere. For nogle andenordens differentialligninger er det dog tilstrækkeligt at kende to punkter på løsningskurven. Nogle andenordens differentialligninger kan løses ved at integrere to gange. Man får herved to konstanter, og man skal derfor kende to punkter eller et linjeelement for at kunne finde den partikulære løsning.

Opgave 8

- a) Løs differentialligningen $y'' = 5t$ ved at integrere to gange.
- b) Bestem den løsning, der går gennem punkterne $(0,3)$ og $(2,30)$.
- c) Tegn hældningsfeltet og løsningskurven gennem de to punkter.

Sætning 1 Den fuldstændige løsning til differentialligningen $y'' = g(t)$, hvor g er en kontinuert funktion i et interval I , er givet ved

$$y = \int G(t) dt + c_1 \cdot t + c_2,$$

hvor $G(t)$ er en stamfunktion til $g(t)$, og hvor c_1 og c_2 er vilkårlige konstanter.

Øvelse 2 Bevis sætningen ved at integrere differentialligningen to gange på samme måde som i opgaven ovenfor.

- Opgave 9**
- Bestem den fuldstændige løsning til differentialligningen $y'' = 4e^{2t}$.
 - Bestem tre løsninger, hvis grafer går gennem punktet $P(1, e^2)$.
 - Bestem den løsning, der går gennem punkterne $P(1, e^2)$ og $Q(5, 0)$.
 - Bestem den løsning, der går gennem punktet $P(1, e^2)$, og som har en tangent med hældningskoefficient 2 i punktet P .

Bemærk, at det for differentialligningen $y'' = 4e^{2t}$ er nødvendigt at kende enten to punkter eller et linjeelement for at fastlægge en entydig løsning.

Sætning 2 Den fuldstændige løsning til differentialligningen $y'' = a \cdot y$ afhænger af fortegnet for konstanten a .

- Hvis $a = 0$, så er den fuldstændige løsning givet ved $y = c_1 \cdot t + c_2$.
- Hvis $a > 0$, så er den fuldstændige løsning givet ved $y = c_1 \cdot e^{\sqrt{a}t} + c_2 \cdot e^{-\sqrt{a}t}$.
- Hvis $a < 0$, så er den fuldstændige løsning givet ved
$$y = c_1 \cdot \cos(\sqrt{-a} \cdot t) + c_2 \cdot \sin(\sqrt{-a} \cdot t).$$

I alle tre tilfælde gælder udtrykket for alle t , og c_1 og c_2 er vilkårlige konstanter.

Bevis

Vi deler beviset op i tre tilfælde svarende til de tre muligheder for fortegnet for a .

- Dette følger af sætning 1. Forklar hvorfor.
- Først bevises, at $y = c_1 \cdot e^{\sqrt{a}t} + c_2 \cdot e^{-\sqrt{a}t}$ rent faktisk er en løsning.

Øvelse 3 Vis dette ved at gøre prøve.

Dernæst bevises, at der ikke findes andre løsninger til differentialligningen end $y = c_1 \cdot e^{\sqrt{a}t} + c_2 \cdot e^{-\sqrt{a}t}$.
Antag derfor, at y er en vilkårlig løsning til differentialligningen.

$$y'' = a \cdot y$$

$$y'' - a \cdot y = 0$$

Vi omskriver differentialligningen ved at gange med faktoren $e^{\sqrt{a} \cdot t}$ og får:

$$y'' \cdot e^{\sqrt{a} \cdot t} - a \cdot y \cdot e^{\sqrt{a} \cdot t} = 0$$

Nu lægger vi leddet $y' \cdot \sqrt{a} \cdot e^{\sqrt{a} \cdot t}$ til på venstre side og trækker det fra igen:

$$y'' \cdot e^{\sqrt{a} \cdot t} + y' \cdot \sqrt{a} \cdot e^{\sqrt{a} \cdot t} - y' \cdot \sqrt{a} \cdot e^{\sqrt{a} \cdot t} - a \cdot y \cdot e^{\sqrt{a} \cdot t} = 0$$

Ved at bruge produktregnereglen for differentiation baglæns kan dette omskrives til:

$$\left(y' \cdot e^{\sqrt{a} \cdot t} \right)' - \left(y \cdot \sqrt{a} \cdot e^{\sqrt{a} \cdot t} \right)' = 0$$

Øvelse 4 Kontrollér, at dette er rigtigt ved at differentiere ovenstående vha. produktregnereglen for differentiation.

Nu bruges differensreglen for differentiation til at samle de to differentialkvotienter:

$$\left(y' \cdot e^{\sqrt{a} \cdot t} - y \cdot \sqrt{a} \cdot e^{\sqrt{a} \cdot t} \right)' = 0$$

Begge sider integreres, og vi får:

$$y' \cdot e^{\sqrt{a} \cdot t} - y \cdot \sqrt{a} \cdot e^{\sqrt{a} \cdot t} = c, \text{ hvor } c \text{ er en konstant.}$$

Vi ganger med $e^{-\sqrt{a} \cdot t}$ på begge sider af lighedstegnet:

$$y' \cdot e^{\sqrt{a} \cdot t} \cdot e^{-\sqrt{a} \cdot t} - y \cdot \sqrt{a} \cdot e^{\sqrt{a} \cdot t} \cdot e^{-\sqrt{a} \cdot t} = c \cdot e^{-\sqrt{a} \cdot t}$$

$$y' - y \cdot \sqrt{a} = c \cdot e^{-\sqrt{a} \cdot t}$$

Nu har vi altså oversat problemet til en lineær førsteordens differentialligning. Vi omskriver denne ligning ved igen at gange med faktoren $e^{-\sqrt{a} \cdot t}$.

$$y' \cdot e^{-\sqrt{a} \cdot t} - y \cdot \sqrt{a} \cdot e^{-\sqrt{a} \cdot t} = c \cdot e^{-\sqrt{a} \cdot t} \cdot e^{-\sqrt{a} \cdot t}$$

Ved at bruge produktregnereglen for differentiation baglæns kan venstre omskrives til:

$$\left(y \cdot e^{-\sqrt{a} \cdot t} \right)' = c \cdot e^{-2 \cdot \sqrt{a} \cdot t}$$

Øvelse 5 Kontroller at dette er rigtigt ved at differentiere ovenstående vha. produktregnereglen for differentiation på venstre side og en potensregneregler på højre side.

Begge sider af ligningen ovenfor integreres, og vi får:

$$y \cdot e^{-\sqrt{a} \cdot t} = -\frac{1}{2 \cdot \sqrt{a}} \cdot c \cdot e^{-2 \cdot \sqrt{a} \cdot t} + c_2, \text{ hvor } c_2 \text{ er en konstant.}$$

Vi ganger nu med faktoren $e^{\sqrt{a} \cdot t}$ på begge sider af lighedstegnet:

$$y \cdot e^{-\sqrt{a} \cdot t} \cdot e^{\sqrt{a} \cdot t} = -\frac{1}{2\sqrt{a}} \cdot c \cdot e^{-2\sqrt{a} \cdot t} \cdot e^{\sqrt{a} \cdot t} + c_2 \cdot e^{\sqrt{a} \cdot t}.$$

Vi omdøber konstanten $-\frac{c}{2\sqrt{a}}$ til c_1 og anvender en potensregneregul:

$$y = c_1 \cdot e^{-\sqrt{a} \cdot t} + c_2 \cdot e^{\sqrt{a} \cdot t}.$$

Vi har hermed bevist at en vilkårlig løsning y til differentialligningen kan skrives på formen

$$y = c_1 \cdot e^{-\sqrt{a} \cdot t} + c_2 \cdot e^{\sqrt{a} \cdot t}.$$

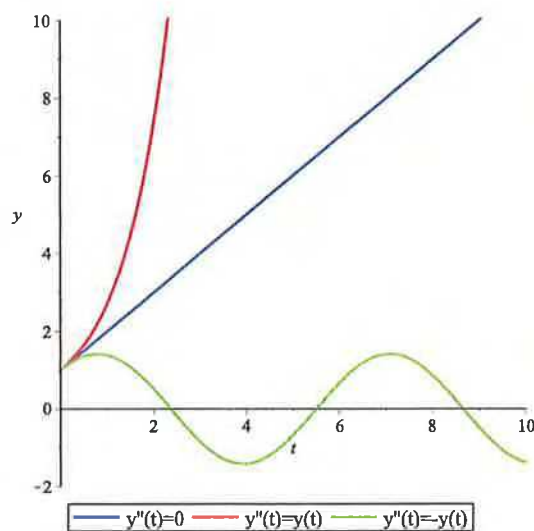
2) Vi mangler nu det sidste at de tre tilfælde, og vi vil bevise, at $y = c_1 \cdot \cos(\sqrt{-a} \cdot t) + c_2 \cdot \sin(\sqrt{-a} \cdot t)$ rent faktisk *er* en løsning til differentialligningen $y'' = a \cdot y$, med $a < 0$.

Øvelse 6 Vis dette ved at gøre prøve.

Til sidst skal det bevises, at der ikke findes andre løsninger til differentialligningen end

$y = c_1 \cdot \cos(\sqrt{-a} \cdot t) + c_2 \cdot \sin(\sqrt{-a} \cdot t)$. Beviset udelades her, men findes i gængse lærebøger.

Nedenfor ses tre mulige løsningskurver til differentialligningen $y'' = a \cdot y$. En hvor $a = 0$, en hvor a er negativ og en hvor a er positiv.



Anvendelser af andenordens differentiaalligninger

Med sætning 2 kan vi arbejde videre med differentiaalligningerne fra Lanchesters model.

Opgave 10 Bestem en partikulær løsning til hver af de to andenordens differentiaalligninger fra opgave 7

$$v''(t) = 0,045 \cdot v(t) \text{ og } u''(t) = 0,045 \cdot u(t).$$

med begyndelsesbetingelserne $u(0) = 120$, $v(0) = 300$, $u'(0) = -45$ og $v'(0) = -3,6$.

Opgave 11 Givet differentiaalligningen

$$y'' = 6 \cdot y.$$

- Brug sætning 2 til at opskrive den fuldstændige løsning.
- Brug sætning 2 til at bestemme den partikulære løsning, hvis løsningskurve går gennem linjeelementet $(1,2;2)$.
- Kontroller din løsning til differentiaalligningen ved hjælp af dit værktøjsprogram.

Andenordens differentiaalligninger fortsat

Inden vi ser nærmere på den sidste af de tre andenordens differentiaalligninger, nemlig $y'' + p \cdot y' + q \cdot y = 0$ indfører vi det tilhørende karakteristiske polynomium.

Definition 1 Ved det karakteristiske polynomium for differentiaalligningen $y'' + p \cdot y' + q \cdot y = 0$ forstås andengradspolynomiet $g(x) = x^2 + p \cdot x + q$, hvor vi har kaldt den variable x for at undgå sammenblanding med variabelen t i differentiaalligningen.

Det karakteristiske polynomiums diskriminant og eventuelle rødder spiller en væsentlig rolle for løsningen af den tilhørende differentiaalligning.

Sætning 3 Den fuldstændige løsning til differentialligningen $y'' + p \cdot y' + q \cdot y = 0$, hvor p og q er konstanter, afhænger af diskriminanten $d = p^2 - 4q$ for det tilhørende karakteristiske polynomium $g(x) = x^2 + p \cdot x + q$.

- 1) Hvis $d > 0$, så har det karakteristiske polynomium to rødder λ og μ , og den fuldstændige løsning til differentialligningen er mængden af funktioner på formen

$$y = c_1 \cdot e^{\lambda t} + c_2 \cdot e^{\mu t},$$

hvor c_1 og c_2 er vilkårlige konstanter.

- 2) Hvis $d = 0$, så har det karakteristiske polynomium én rod λ , og den fuldstændige løsning til differentialligningen er mængden af funktioner på formen:

$$y = c_1 \cdot e^{\lambda t} + c_2 \cdot t \cdot e^{\lambda t},$$

hvor c_1 og c_2 er vilkårlige konstanter.

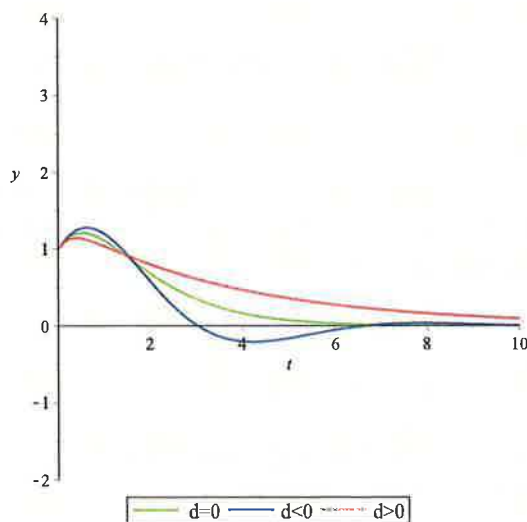
- 3) Hvis $d < 0$, så er den fuldstændige løsning til differentialligningen mængden af funktioner på formen:

$$y = c_1 \cdot e^{-\frac{1}{2}pt} \cos\left(\frac{1}{2}\sqrt{-d} \cdot t\right) + c_2 \cdot e^{-\frac{1}{2}pt} \sin\left(\frac{1}{2}\sqrt{-d} \cdot t\right),$$

hvor c_1 og c_2 er vilkårlige konstanter.

Beviset udelades her, men kan læses i flere gængse lærebøger.

Nedenfor ses tre mulige løsningskurver til differentialligningen $y'' + p \cdot y' + q \cdot y = 0$. Én for hver af de tre fortegn for det karakteristiske polynomiums diskriminant d .



Opgave 12 Givet differentialligningen

$$y'' - 4 \cdot y' + 5 \cdot y = 0$$

- a) Opskriv det karakteristiske polynomium, og bestem den tilhørende diskriminant.
- b) Gør rede for, hvilken type forskrift løsningen $f(t)$ kan beskrives ved.
- c) Bestem den partikulære løsning, som opfylder, at $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$ og $f'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2$.

Opgave 13 Givet differentialligningen

$$y'' = y' + 2 \cdot y.$$

- a) Opskriv det karakteristiske polynomium, og bestem den tilhørende diskriminant.
- b) Gør rede for, hvilken type forskrift løsningen $f(t)$ kan beskrives ved.
- c) Bestem den partikulære løsning, hvis graf går gennem linjeelementet $\left(3, 2; \frac{1}{2}\right)$.

Opgave 14 Givet differentialligningen

$$20 \cdot y'' + 40 \cdot y' + 20 \cdot y = 0$$

- a) Opskriv det karakteristiske polynomium, og bestem den tilhørende diskriminant.
- b) Gør rede for, hvilken type forskrift løsningen $f(t)$ kan beskrives ved.
- c) Bestem den partikulære løsning, som opfylder at $f(0) = 5$ og $f'(0) = 0$.

Anvendelser af andenordens differentialligninger fortsat

Eksempel 3 Fjeder uden friktion

Et lod er ophængt i en fjeder, og når vi trækker i loddet og slipper, så bevæger fjederen sig op og ned. Vi antager først, at der ikke er nogen friktion i bevægelsen, og at loddet derfor vil fortsætte med at bevæge sig op og ned.

Bevægelsesligningen for loddet kan beskrives ved

$$y''(t) = -\frac{k}{m} \cdot y(t),$$

hvor $y(t)$ er loddets afstand fra ligevægtspunktet, t er tiden, m er loddets masse og k er en konstant – herefter kaldet fjederkonstanten.

Opgave 15 Et lod på 0,5 kg ophænges i en fjeder. Det trækkes 4 cm væk fra ligevægtspunktet, holdes i hvile et øjeblik, slippes til $t = 0$, og starter derefter sine svingninger. Fjederkonstanten er $k = 3$.

- Opskriv begyndelsesbetingelserne og differentialligningen.
- Løs differentialligningen vha. af sætning 2, så du får et udtryk for y som funktion af t . Tjek din løsning ved også at løse differentialligningen i dit værktøjsprogram.
- Tegn grafen for y .

Eksempel 4 Fjeder med friktion

En fjeder vil naturligvis ikke fortsætte i evighed med at svinge op og ned. Udsvingene vil aftage med tiden på grund af friktion. Tager man dette aspekt med i modellen for fjederens bevægelse, ændres bevægelsesligningen til:

$$y''(t) + \frac{b}{m} \cdot y'(t) + \frac{k}{m} \cdot y(t) = 0,$$

hvor $y(t)$ er loddets afstand fra ligevægtspunktet, t er tiden, m er loddets masse, k er fjederkonstanten, og b er en konstant.

Opgave 16 For en bestemt fjeder er $m = 10 \text{ kg}$, $k = 26,5$ og $b = 6$.

- Opskriv differentialligningen med disse konstanter indsat, og opskriv det karakteristiske polynomium, der hører til denne differentialligning.
- Bestem diskriminanten for det karakteristiske polynomium samt eventuelle rødder.
- Bestem den fuldstændige løsning til differentialligningen.
- Bestem den partikulære løsning, når $y(0) = 3$ og $y'(0) = 7,1$.
- Tegn grafen for y .
- Denne type af fjedersvingninger kaldes *dæmpede svingninger*. Hvorfor mon?

Opgave 17 For en bestemt fjeder er $m = 1 \text{ kg}$, $k = 9$ og $b = 6$.

- Bestem den partikulære løsning, når $y(0) = 3$ og $y'(0) = 4$.
- Tegn grafen for y .
- Denne type af fjedersvingninger kaldes *kritisk dæmpede svingninger*. Hvorfor mon?

Opgave 18 For en bestemt fjeder er $m = 2 \text{ kg}$, $k = 8$ og $b = 10$.

- Bestem den partikulære løsning når $y(0) = 1$ og $y'(0) = -7$.
- Tegn grafen for y .
- Denne type af fjedersvingninger kaldes *overdæmpede svingninger*. Hvorfor mon?

Bevægelsesligningerne i ovenstående eksempler med fjedre kan også bruges til at beskrive andre typer af svingninger.

Eksempel 5 Lidokain i blodet

I behandling af uregelmæssig hjerterytme kan et system af koblede differentialligninger modellere brugen af medikamentet lidokain.

Antag, at $u(t)$ betegner massen af lidokain i blodet (målt i mg), og $v(t)$ betegner massen af lidokain i kropsvævet (målt i mg). Det koblede system af differentialligninger kan for en bestemt kropsvægt da opstilles som:

$$\begin{aligned}u'(t) &= -0,09 \cdot u(t) + 0,038 \cdot v(t) \\v'(t) &= 0,066 \cdot u(t) - 0,038 \cdot v(t)\end{aligned}$$

I modellen er massen af lidokain i blodet til at begynde med 0, og massen af lidokain i kropsvævet svarer til massen af den dosis, der indsprøjtes.

Kilde: J. M. Cushing, *Differential Equations: An Applied Approach*

Øvelse 7

- Omskriv det koblede system af differentialligninger i eksempel 5 til 2. ordens differentialligninger.
- Bestem de partikulære løsninger til systemet af koblede differentialligninger i eksempel 5, når begyndelsesbetingelserne er $u(0) = 0$ og $v(0) = 1$.
- Tegn et faseplot for disse løsninger.

Eksempel 6 Marketingsstrategi

En kosmetikkæde har en marketingsstrategi for prisen på en bestemt shampoo.

I et system af koblede differentialligninger betegner $u(t)$ prisen på shampoo, og $v(t)$ betegner lagermængden af den bestemte shampoo. Et system af koblede differentialligninger for den bestemte shampoo kan formuleres som:

$$\begin{aligned}u'(t) &= v(t) - 50 \\v'(t) &= \frac{13}{4} \cdot u(t) - 6 \cdot v(t) + 289\end{aligned}$$

med begyndelsesbetingelserne $u(0) = 10$ og $v(0) = 7$.

Øvelse 8

- Omskriv det koblede system af differentialligninger i eksempel 6 til 2. ordens differentialligninger.
- Bestem de partikulære løsninger til systemet af koblede differentialligninger fra eksempel 6.
- Hvad sker der med pris og lagermængde, når t bliver meget stor.
- Tegn et faseplot for disse løsninger.

Bilag

Koblede differentialligninger og faseplot i Maple

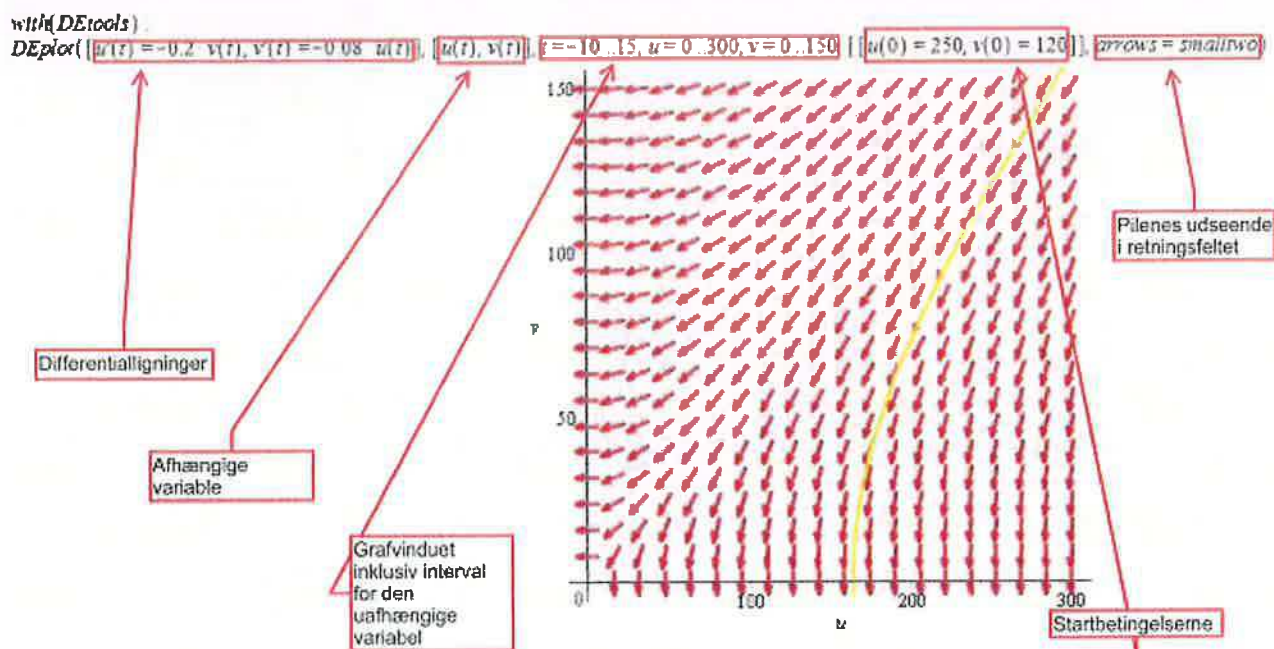
Udgangspunktet er et system af koblede af differentialligninger

$$u'(t) = -0,2v(t)$$

$$v'(t) = -0,08u(t)$$

En partikulær løsning skal opfylde $u(0) = 250$ og $v(0) = 120$.

Hvis et retningsfelt ønskes tegnet sammen med faseplottet, så er det muligt i Maple med pakken *DEtools* og kommandoen *DEplot*



Koblede differentialligninger og faseplot i Geogebra

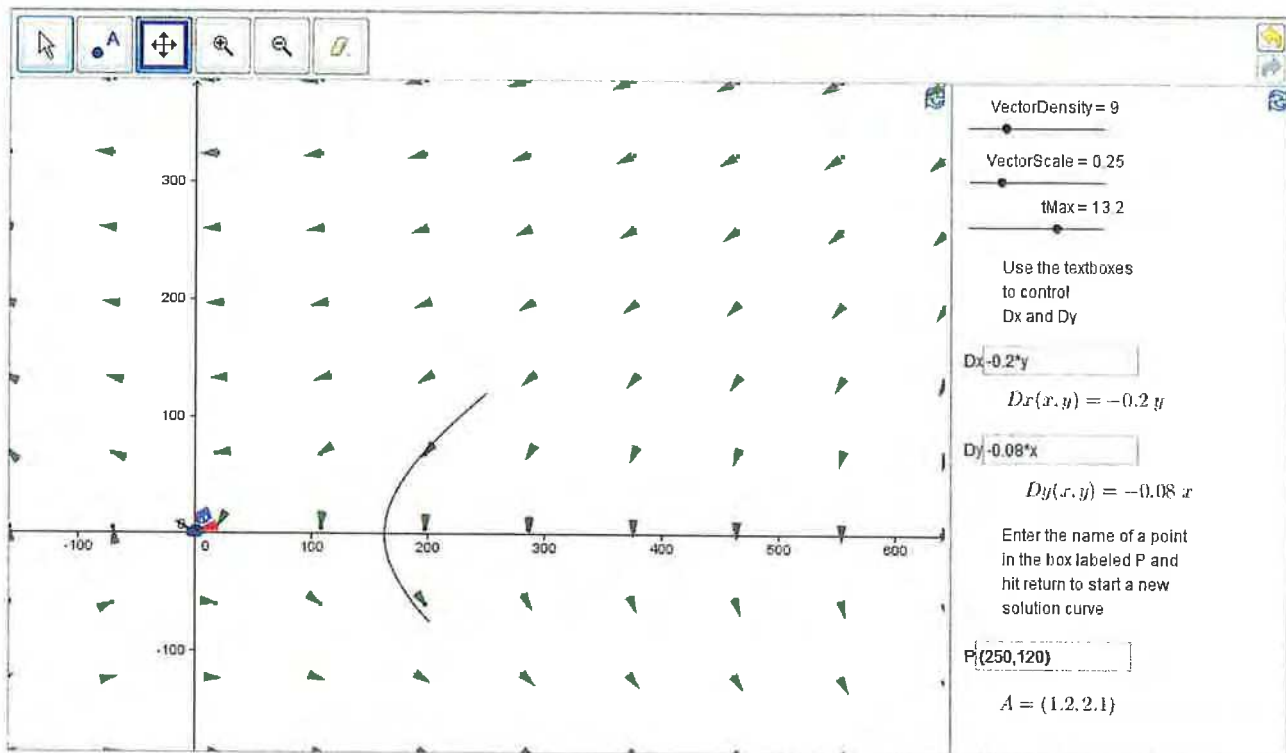
Udgangspunktet er et system af koblede af differentialligninger

$$u'(t) = -0,2v(t)$$

$$v'(t) = -0,08u(t)$$

En partikulær løsning skal opfylde $u(0) = 250$ og $v(0) = 120$.

Hvis et retningsfelt ønskes tegnet sammen med faseplottet, så er det muligt i Geogebra med dette worksheet <http://www.geogebraTube.org/student/m8930> eller Geogebrafilen GeogebraFaseplot.



Koblede differentialligninger og faseplot i NSpire

Udgangspunktet er et system af koblede af differentialligninger

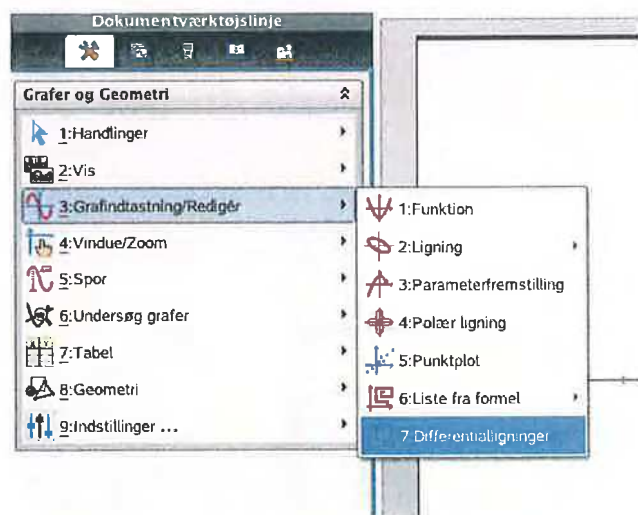
$$u'(t) = -0,2v(t)$$

$$v'(t) = -0,08u(t)$$

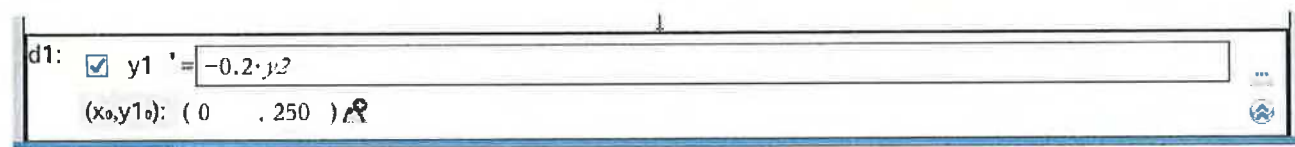
En partikulær løsning skal opfylde $u(0) = 250$ og $v(0) = 120$.

Hvis et retningsfelt ønskes tegnet sammen med faseplottet, så er det muligt i grafvinduet i NSpire.

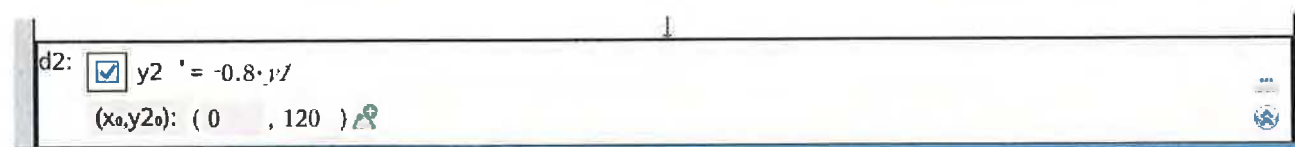
Under "Grafindtastning/Rediger" vælges først "Differentialligninger":



Herefter indtastes den første differentialligning sammen med begyndelsesbetingelsen for u . Bemærk at u kalds $y1$ og v kaldes $y2$.



Herefter indtastes den anden differentialligning samt begyndelsesbetingelser for v , og der klikkes på knappen med de tre prikker yderst til højre:



Vælg følgende indstillinger i det fremkomne vindue:

Differentialligning

Løsningsmetode: Runge-Kutta

Fejltolerance: 0.001

Felt: Retning

Akser: Brugerdefineret

x ← y1

y ← y2

Plot-start: -10

Plot-slut: 10

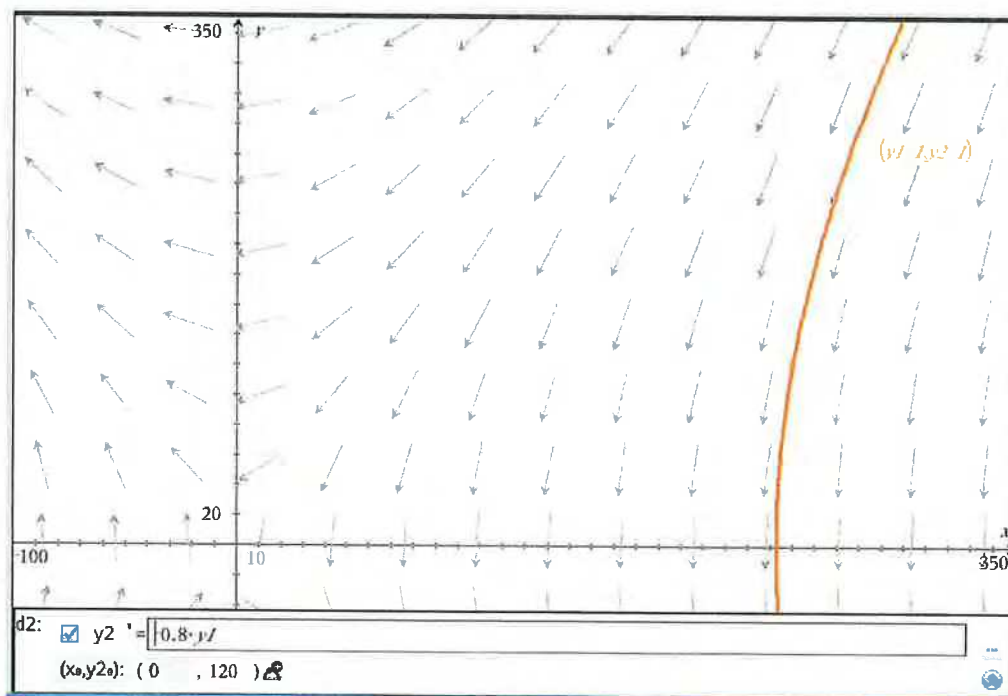
Plottrin: 0.01

Feltopløsning: 14

Retningsfelt i x = 0

OK Annuller

Til sidst ændres vinduets størrelse, så det passer til faseplottet:



Delprøven uden hjælpemidler

Kl. 09.00 – 10.00

Opgave 1

En funktion f er bestemt ved

$$f(x) = 2x^2 + 4x - 6.$$

Grafen for f er en parabel.

Bestem koordinatsættet til parablens toppunkt.

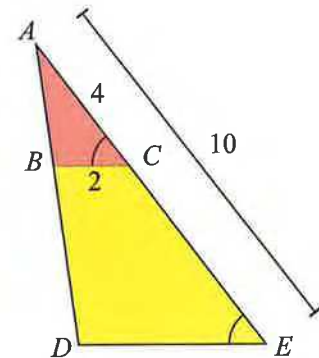
Opgave 2

På figuren ses en model af et sejl ADE .

Det oplyses, at DE og BC er parallelle,

samt at $|AE| = 10$, $|AC| = 4$ og $|BC| = 2$.

Bestem $|DE|$.



Opgave 3

Løs ligningssystemet

$$x + y = 11$$

$$6x + 2y = 42.$$

Opgave 4

En cirkel er bestemt ved ligningen $x^2 - 6x + y^2 + 2y - 26 = 0$.

Bestem cirkelens radius og koordinatsættet til cirkelens centrum.

Opgave 5

En funktion f er givet ved

$$f(x) = ax^3 + 5x^2 + 2x + 1,$$

hvor a er en konstant.

Bestem a , så $f'(1) = -3$.

Opgave 6 Bestem integralet

$$\int \frac{2x}{x^2 + 7} dx.$$

Besvarelsen afleveres kl. 10.00
--

Delprøven med hjælpemidler

Kl. 09.00 – 14.00

Opgave 7 Om trekant ABC oplyses, at $\angle A = 80^\circ$, $a = 12$ og $b = 11$.

- a) Bestem $\angle B$ og $\angle C$.
- b) Bestem længden af medianen m_a .

Opgave 8 I den internationale organisation ICCA har man siden 1963 opgjort det årlige antal møder. Tabellen viser det årlige antal møder for en række af årene efter 1963.

År efter 1963	0	5	10	15	20	25	30	35	40	45
Antal møder	359	539	811	1195	1717	2452	3372	5107	8164	10969

I en model antages, at sammenhængen mellem det årlige antal møder og antal år efter 1963 kan beskrives ved funktionen

$$M(t) = b \cdot a^t,$$

hvor $M(t)$ er det årlige antal møder, og t er antallet af år efter 1963.

- a) Benyt tabellens data til at bestemme konstanterne a og b .
- b) Benyt modellen til at bestemme det årlige antal møder i 2010, og bestem fordoblingskonstanten.
- c) Bestem $M'(37)$, og forklar betydningen af dette tal.

Kilde: A Modern History of International Association Meetings 1963 until 2013.

Opgave 9 I tabellen ses en aldersfordeling blandt voksenlærlinge i Danmark i 2013.

Alder(år)	25 – 30	30 – 35	35 – 40	40 – 45	45 – 50	50 – 55	55 – 60
Antal	876	634	354	217	156	79	34

- a) Bestem de kumulerede frekvenser, og tegn en sumkurve for aldersfordelingen.
- b) Bestem kvartilsættet for aldersfordelingen, og bestem procentdelen af voksenlærlinge, der er over 42 år.

Kilde: www.dst.dk

Opgave 10 En funktion f er givet ved

$$f(x) = x^3 - 5x^2 + 7,5x - 2.$$

- a) Skitsér grafen for f , og bestem en ligning for tangenten t til grafen for f i punktet $A(1, f(1))$.

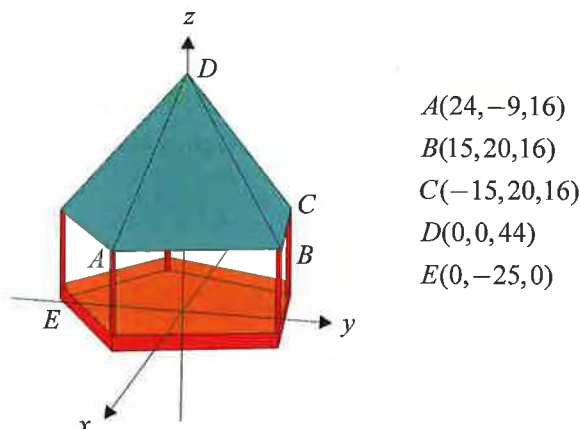
Tangenten t skærer grafen for f i et andet punkt B , og afgrænser sammen med grafen for f et område M , der har et areal.

- b) Bestem førstekoordinaten til punktet B , og bestem arealet af området M .

Opgave 11 En linje l går gennem to punkter $A(1,5)$ og $B(9,17)$.

- a) Bestem en parameterfremstilling for linjen l .
- b) Bestem koordinatsættet til projektionen af punktet $P(-10,21)$ på linjen l .

Opgave 12



På figuren ses en model af et fuglehus indtegnet i et koordinatsystem med enheden cm på hver af de tre akser. Koordinaterne til nogle af fuglehusets hjørner er angivet på figuren.

- a) Bestem en ligning for den plan α , der indeholder tagfladen ABD .

Det oplyses, at planen β , der indeholder tagfladen BCD , kan beskrives ved ligningen

$$\beta: 7y + 5z - 220 = 0.$$

- b) Bestem den stumpe vinkel mellem tagfladerne ABD og BCD .
- c) Bestem afstanden fra punktet E til tagfladen BCD .

Opgave 13

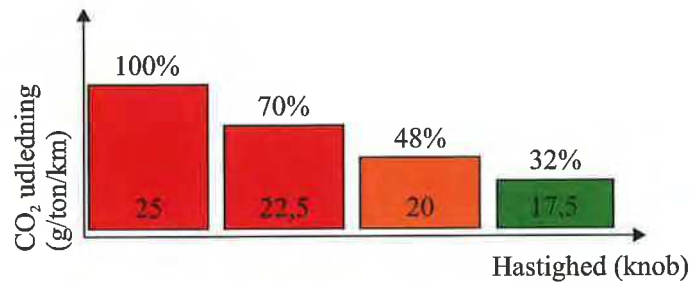
I en model for et containerskibs CO₂-udledning, kan skibets CO₂-udledning beskrives ved en funktion U , der er løsning til differentialligningen

$$\frac{dU}{dx} = 0,1518 \cdot U$$

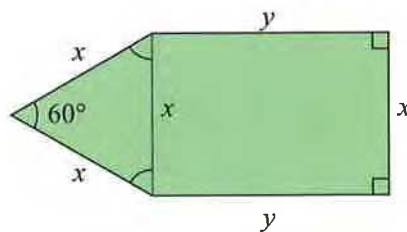
hvor U er skibets CO₂-udledning (målt i g/ton/km), og x er skibets fart (målt i knob).

I modellen er containerskibets CO₂-udledning på 6,25 g/ton/km, når skibets fart er 25 knob.

- Bestem en forskrift for U , og benyt denne til at bestemme skibets fart, når dets CO₂-udledning er 4 g/ton/km.
- Undersøg, om modellen understøtter påstanden, der fremgår af nedenstående figur, nemlig, at man kan reducere CO₂-udledningen fra 100% ved en fart på 25 knob til 32% ved en fart på 17,5 knob.



Opgave 14



En bestemt type byggegrund er sammensat af en ligesidet trekant med sidelængde x , og et rektangel med sidelængder x og y (se figur). Alle sidelængder måles i meter.

- Bestem byggegrundens omkreds og areal, når $x = 50$ og $y = 100$.

En bestemt byggegrund af denne type skal have en omkreds på 200 m.

- Bestem sidelængden y udtrykt ved x , og gør rede for, at byggegrundens areal T som funktion af x kan beskrives ved

$$T(x) = \left(\frac{\sqrt{3}}{4} - \frac{3}{2} \right) x^2 + 100x.$$

- Bestem de værdier af x og y , der gør arealet af denne byggegrund størst mulig, når $20 \leq x \leq 60$.



**UNDERVISNINGS
MINISTERIET**
KVALITETS- OG
TILSYNSSTYRELSEN

Matematik A

Studentereksamen

Digital eksamensopgave med adgang til internettet

Opgavesættet er delt i to dele.

Delprøven uden hjælpemidler består af 12 spørgsmål.

Delprøven med hjælpemidler består af 13 spørgsmål.

De 25 spørgsmål indgår med lige vægt i bedømmelsen.

Bedømmelsen af det skriftlige eksamenssæt

I bedømmelsen af besvarelsen af de enkelte spørgsmål og i helhedsindtrykket vil der blive lagt vægt på, om eksaminandens tankegang fremgår klart af besvarelsen. Dette vurderes blandt andet ud fra kravene beskrevet i de følgende fem kategorier:

1. TEKST

Besvarelsen skal indeholde en forbindende tekst fra start til slut, der giver en klar præsentation af, hvad den enkelte opgave og de enkelte delspørgsmål går ud på.

2. NOTATION OG LAYOUT

Der kræves en hensigtsmæssig opstilling af besvarelsen i overensstemmelse med god matematisk skik, herunder en redegørelse for den matematiske notation, der indføres og anvendes, og som ikke kan henføres til standardviden.

3. REDEGØRELSE OG DOKUMENTATION

Besvarelsen skal indeholde en redegørelse for den anvendte fremgangsmåde og dokumentation i form af et passende antal mellemregninger og/eller en matematisk forklaring på brugen af de forskellige faciliteter, som et værktøjsprogram tilbyder.

4. FIGURER

I besvarelsen skal der indgå en hensigtsmæssig brug af figurer og illustrationer, og der skal være en tydelig sammenhæng mellem tekst og figurer.

5. KONKLUSION

Besvarelsen skal indeholde en afrunding af de forskellige spørgsmål med præcise konklusioner, præsenteret i et klart sprog og/eller med brug af almindelig matematisk notation.

Delprøven uden hjælpemidler

Kl. 09.00 – 11.00

- Opgave 1** a) Løs andengradsligningen

$$3x^2 - x - 2 = 0.$$

- Opgave 2** To vektorer $\vec{a}$ og $\vec{b}$ er givet ved

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ og } \vec{b} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

- a) Bestem koordinatsættet til projektionen af $\vec{a}$ på $\vec{b}$.

- Opgave 3** a) Isolér x i ligningen

$$\sqrt{2x+3} = 5.$$

- Opgave 4** I en model for ændringen af massen af et radioaktivt stof kan sammenhængen mellem massen M (målt i gram) og tiden t (målt i sekunder) beskrives ved

$$M(t) = 250 \cdot 0,9956^t.$$

- a) Gør rede for, hvad konstanterne 250 og 0,9956 fortæller om ændringen af massen af det radioaktive stof.

- Opgave 5** Linjen l går gennem punkterne $A(-1, 2)$ og $B(5, 26)$.

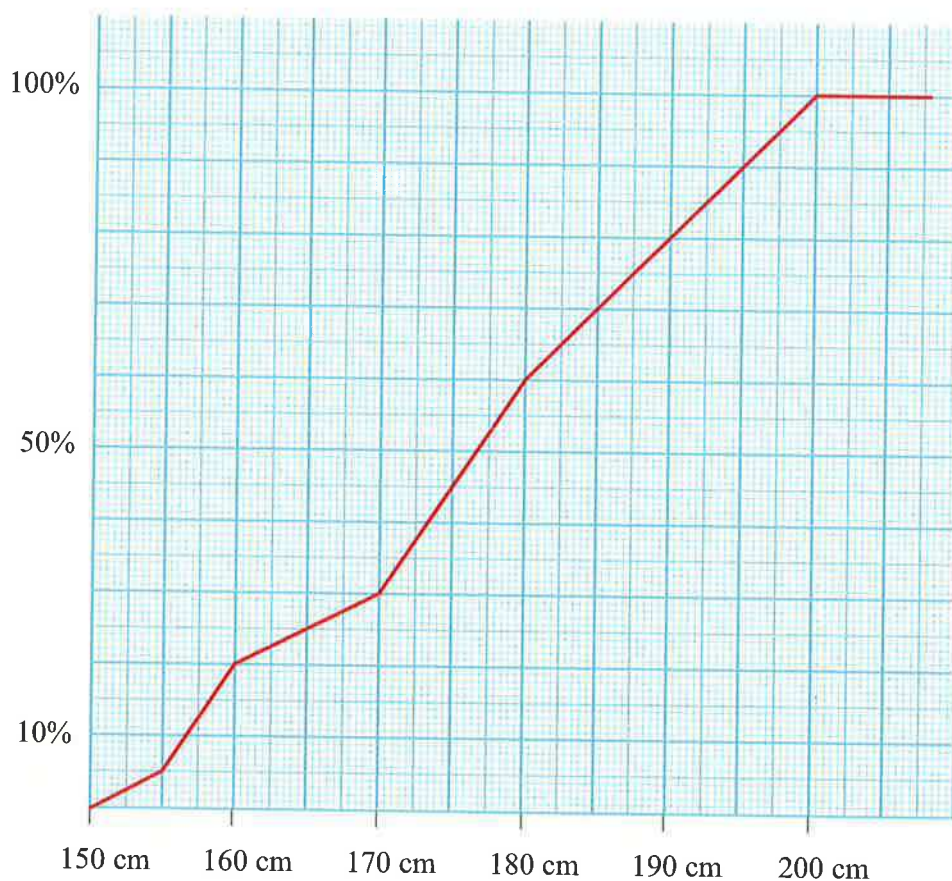
- a) Bestem en parameterfremstilling for l .

Linjen m står vinkelret på l og går gennem A .

- b) Bestem en ligning for m .

Opgave 6 Figuren viser en sumkurve over højdefordelingen blandt 800 elever på en skole.

Til opgaven
hører et bilag



- a) Bestem kvartilsættet for højdefordelingen og bestem, hvor mange elever på skolen der er mindre end 160 cm. Benyt evt. bilag 1.

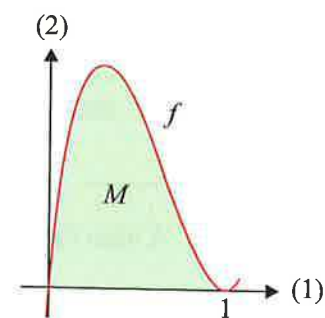
Opgave 7 En funktion f er bestemt ved

$$f(x) = 12x^3 - 24x^2 + 12x.$$

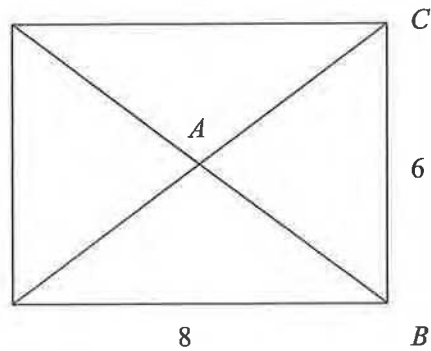
- a) Bestem en ligning for tangenten til grafen for f i punktet $P(0, f(0))$.

Grafen for f og førsteaksen afgrænser for $0 \leq x \leq 1$ i første kvadrant en punktmængde M , der har et areal (se figuren).

- b) Bestem arealet af M .



Opgave 8



På figuren ses et rektangel med sidelængderne 6 og 8. Diagonalernes skæringspunkt benævnes A .

- a) Bestem arealet af trekant ABC .
- b) Bestem omkredsen af trekant ABC .

Opgave 9

En funktion f er bestemt ved

$$f(x) = x^2 + b \cdot x + c.$$

Det oplyses, at linjen med ligningen $y = -x + 5$ er tangent til grafen for f i punktet $P(1, f(1))$.

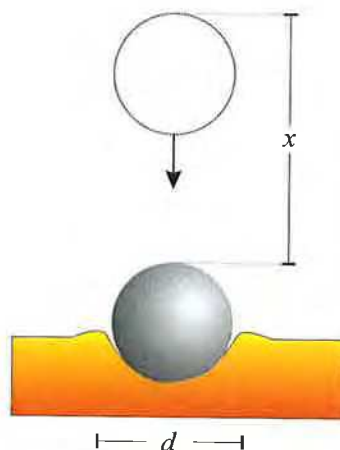
- a) Bestem b og c .

Besvarelsen afleveres kl. 11.00

Delprøven med hjælpemidler

Kl. 09.00 – 14.00

Opgave 10



Tabellen viser sammenhørende værdier af faldhøjde og kraterdiameter for en kugle, der falder ned i en sandkasse.

Faldhøjde (cm)	20	30	50	83	100
Kraterdiameter (cm)	5,0	5,6	6,5	7,4	7,8

I en model kan sammenhængen beskrives ved

$$d = b \cdot x^a,$$

hvor d er kraterdiameteren (målt i cm), og x er faldhøjden (målt i cm).

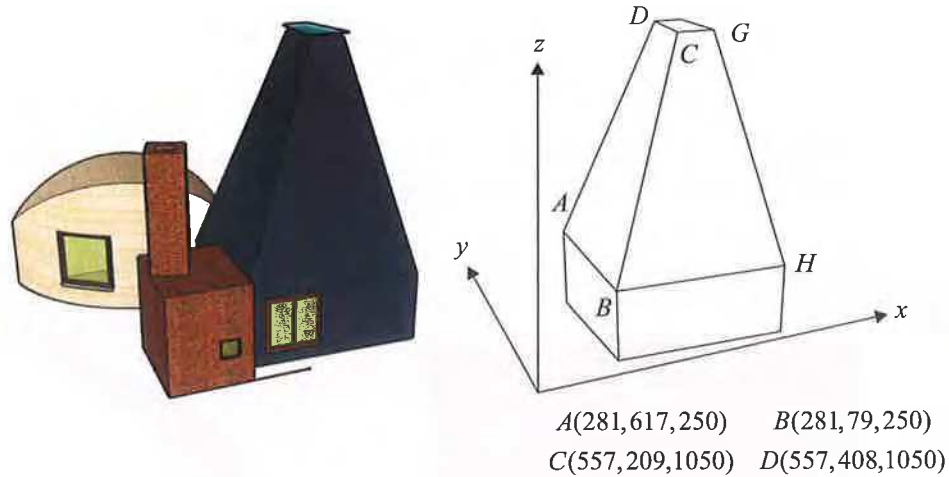
- Benyt tabellens data til at bestemme konstanterne a og b .
- Benyt modellen til at bestemme kraterdiameteren for et fald med en faldhøjde på 90 cm og til at bestemme faldhøjden, når kraterdiameteren er 8,5 cm.
- Benyt modellen til at bestemme, hvor mange procent kraterdiameteren øges med, når faldhøjden øges med 50%.

Opgave 11

I trekant ABC er $|BC| = 7$ og $|AB| = 6$. Det oplyses, at arealet af trekant ABC er 10, samt at $\angle B$ er spids.

- Bestem $\angle B$ samt omkredsen af trekant ABC .

Opgave 12



I Minnesota USA ligger gæstehuset *Winton* tegnet af arkitekten Frank O. Gehry. På figuren ses en model af en af de tre bygninger, der indgår i gæstehuset. Modellen er indlagt i et koordinatsystem, hvor enheden er cm på hver af akserne. Koordinaterne til nogle af husets hjørnepunkter er angivet på figuren.

- a) Bestem en ligning for den plan α , som indeholder tagfladen $ABCD$.

Det oplyses, at tagfladen $BCGH$ ligger i en plan β , der er bestemt ved ligningen

$$\beta: 1800x + 51520y - 8993z - 2327630 = 0.$$

- b) Bestem den stumpe vinkel mellem de to tagflader $ABCD$ og $BCGH$.

Opgave 13 Et system af koblede differentialligninger er givet ved

$$\begin{aligned} u'(t) &= v(t) \\ v'(t) &= -2u(t). \end{aligned}$$

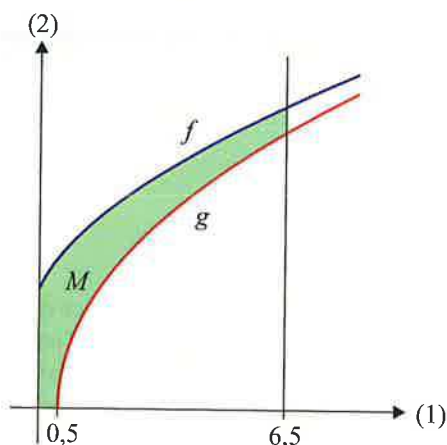
- a) Bestem væksthastighederne i punktet $(u, v) = (3, 4)$.
- b) Tegn et faseplot, hvor en partikulær løsning, der opfylder $u(0) = 10$ og $v(0) = 10$, er indtegnet.

Opgave 14 To funktioner f og g er bestemt ved

$$f(x) = 2,5 \cdot \sqrt{x + 0,05} + 1,4, \quad x \geq 0$$

$$g(x) = 3 \cdot \sqrt{x - 0,5}, \quad x \geq 0,5$$

I første kvadrant afgrænser graferne for f og g sammen med koordinataksene og linjen med ligningen $x = 6,5$ en punktmængde M , der har et areal.



En keramiskskål, der er 6,5 cm høj, kan i en model beskrives ved det omdrejningslegeme, der fremkommer ved at dreje M 360° om førsteaksen. I modellen har begge akser enheden cm.

- a) Benyt modellen til at bestemme, hvor meget skålen kan rumme, og til at bestemme volumen af den ler, skålen er lavet af.

Opgave 15 Når en person springer ud fra en vippe i en svømmehal sættes brættets yderste ende i lodrette svingninger. For at beskrive dette har man markeret et punkt P på vippen (se figuren).

I en model kan punktets lodrette udsving beskrives ved en funktion $f(t)$, der er løsning til differentialligningen

$$y'' + 0,38 \cdot y' + 0,55 \cdot y = 0,$$

hvor $f(t)$ er punktet P 's udsving fra ligevægtsstillingen (målt i cm) til tidspunktet t (målt i sekunder efter udspringet).



Foto: Colourbox.com

- a) Opskriv det karakteristiske polynomium for differentialligningen, og benyt dette til at gøre rede for, hvilken type forskrift $f(t)$ kan beskrives ved.

Det oplyses, at ved selve udspringet er punktet 15 cm under ligevægtsstillingen, og punktets hastighed er 0 cm/s.

- b) Bestem en forskrift for $f(t)$, og tegn grafen for f for de første 10 sekunder efter udspringet.

Opgave 16 En funktion f er bestemt ved

$$f(x) = 1 - x^2.$$

På figuren ses en skitse af grafen for f .

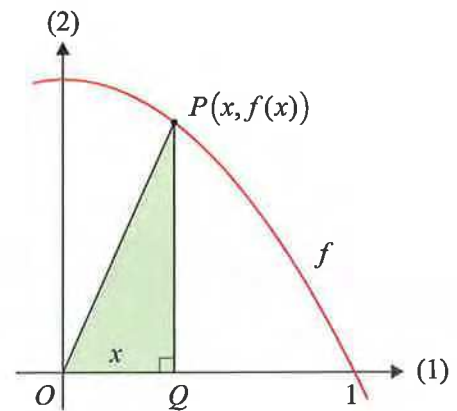
- a) Gør rede for, at arealet af trekant OPQ udtrykt ved x er givet ved

$$T(x) = \frac{1}{2}(x - x^3),$$

og gør rede for, at omkredsen af trekant OPQ udtrykt ved x er givet ved

$$d(x) = -x^2 + x + 1 + \sqrt{x^4 - x^2 + 1}.$$

- b) Bestem den værdi af x , der giver den maksimale værdi af arealet af trekant OPQ , og undersøg, om denne værdi af x også giver den maksimale værdi af omkredsen af trekant OPQ .



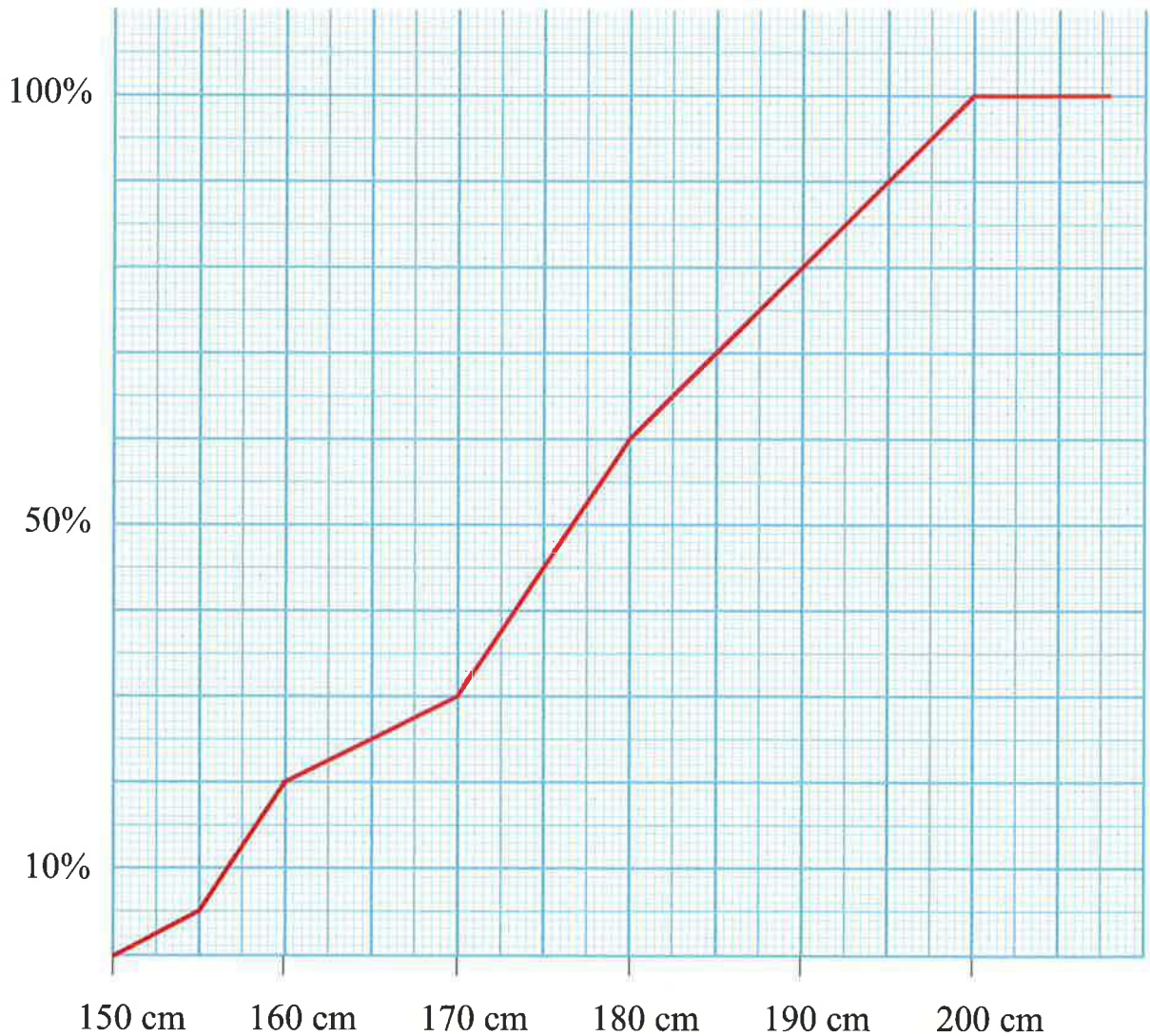
BILAG 1

Stx matematik A-net maj 2014

Bilaget kan indgå i besvarelsen.

Skole	Hold		ID
Navn	Ark nr	Antal ark i alt	Tilsynsførende

6





**UNDERVISNINGS
MINISTERIET**
KVALITETS- OG
TILSYNSSTYRELSEN

Matematik A

Studentereksamen

Opgavesættet er delt i to dele.

Delprøven uden hjælpemidler består af opgave 1-6 med i alt 6 spørgsmål.
Delprøven med hjælpemidler består af opgave 7-14 med i alt 19 spørgsmål.

De 25 spørgsmål indgår med lige vægt i bedømmelsen.

Bedømmelsen af det skriftlige eksamenssæt

I bedømmelsen af besvarelsen af de enkelte spørgsmål og i helhedsindtrykket vil der blive lagt vægt på, om eksaminandens tankegang fremgår klart af besvarelsen. Dette vurderes blandt andet ud fra kravene beskrevet i de følgende fem kategorier:

1. TEKST

Besvarelsen skal indeholde en forbindende tekst fra start til slut, der giver en klar præsentation af, hvad den enkelte opgave og de enkelte delspørgsmål går ud på.

2. NOTATION OG LAYOUT

Der kræves en hensigtsmæssig opstilling af besvarelsen i overensstemmelse med god matematisk skik, herunder en redegørelse for den matematiske notation, der indføres og anvendes, og som ikke kan henføres til standardviden.

3. REDEGØRELSE OG DOKUMENTATION

Besvarelsen skal indeholde en redegørelse for den anvendte fremgangsmåde og dokumentation i form af et passende antal mellemregninger og/eller en matematisk forklaring på brugen af de forskellige faciliteter, som et værktøjsprogram tilbyder.

4. FIGURER

I besvarelsen skal der indgå en hensigtsmæssig brug af figurer og illustrationer, og der skal være en tydelig sammenhæng mellem tekst og figurer.

5. KONKLUSION

Besvarelsen skal indeholde en afrunding af de forskellige spørgsmål med præcise konklusioner, præsenteret i et klart sprog og/eller med brug af almindelig matematisk notation.

Delprøven uden hjælpemidler

Kl. 09.00 – 10.00

Opgave 1 En funktion f er bestemt ved

$$f(x) = 2x^2 + 4x - 6.$$

Grafen for f er en parabel.

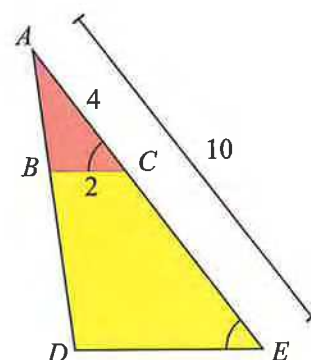
Bestem koordinatsættet til parablens toppunkt.

Opgave 2 På figuren ses en model af et sejl ADE .

Det oplyses, at DE og BC er parallelle,

samt at $|AE| = 10$, $|AC| = 4$ og $|BC| = 2$.

Bestem $|DE|$.



Opgave 3 Løs ligningssystemet

$$x + y = 11$$

$$6x + 2y = 42.$$

Opgave 4 En cirkel er bestemt ved ligningen $x^2 - 6x + y^2 + 2y - 26 = 0$.

Bestem cirkelens radius og koordinatsættet til cirkelens centrum.

Opgave 5 En funktion f er givet ved

$$f(x) = ax^3 + 5x^2 + 2x + 1,$$

hvor a er en konstant.

Bestem a , så $f'(1) = -3$.

Opgave 6 Bestem integralet

$$\int \frac{2x}{x^2 + 7} dx.$$

Besvarelsen afleveres kl. 10.00

Delprøven med hjælpemidler

Kl. 09.00 – 14.00

Opgave 7 Om trekant ABC oplyses, at $\angle A = 80^\circ$, $a = 12$ og $b = 11$.

- a) Bestem $\angle B$ og $\angle C$.
- b) Bestem længden af medianen m_a .

Opgave 8 I den internationale organisation ICCA har man siden 1963 opgjort det årlige antal møder. Tabellen viser det årlige antal møder for en række af årene efter 1963.

År efter 1963	0	5	10	15	20	25	30	35	40	45
Antal møder	359	539	811	1195	1717	2452	3372	5107	8164	10969

I en model antages, at sammenhængen mellem det årlige antal møder og antal år efter 1963 kan beskrives ved funktionen

$$M(t) = b \cdot a^t,$$

hvor $M(t)$ er det årlige antal møder, og t er antal år efter 1963.

- a) Benyt tabellens data til at bestemme konstanterne a og b .
- b) Benyt modellen til at bestemme det årlige antal møder i 2010, og bestem fordoblingskonstanten.
- c) Bestem $M'(37)$, og forklar betydningen af dette tal.

Kilde: *A Modern History of International Association Meetings 1963 until 2013*.

Opgave 9 En funktion f er givet ved

$$f(x) = x^3 - 5x^2 + 7,5x - 2.$$

- a) Skitsér grafen for f , og bestem en ligning for tangenten t til grafen for f i punktet $A(1, f(1))$.

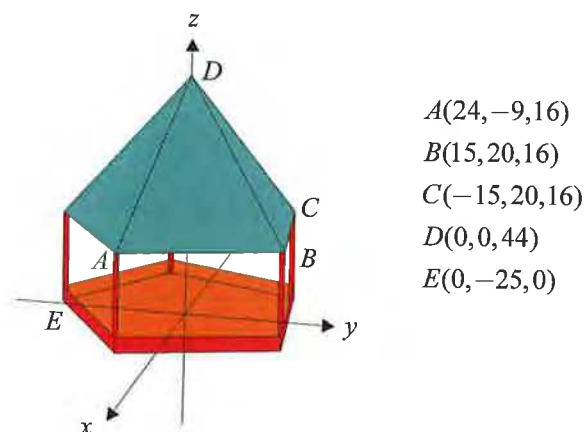
Tangenten t skærer grafen for f i et andet punkt B , og afgrænser sammen med grafen for f et område M , der har et areal.

- b) Bestem førstekoordinaten til punktet B , og bestem arealet af området M .

Opgave 10 En linje l går gennem to punkter $A(1,5)$ og $B(9,17)$.

- a) Bestem en parameterfremstilling for linjen l .
- b) Bestem koordinatsættet til projektionen af punktet $P(-10,21)$ på linjen l .

Opgave 11



På figuren ses en model af et fuglehus indtegnet i et koordinatsystem med enheden cm på hver af de tre akser. Koordinaterne til nogle af fuglehusets hjørner er angivet på figuren.

- a) Bestem en ligning for den plan α , der indeholder tagfladen ABD .

Det oplyses, at planen β , der indeholder tagfladen BCD , kan beskrives ved ligningen

$$\beta: 7y + 5z - 220 = 0.$$

- b) Bestem den stump vinkel mellem tagfladerne ABD og BCD .
- c) Bestem afstanden fra punktet E til tagfladen BCD .

Opgave 12

Tabellen viser, hvordan det samlede antal familier med bil var fordelt på de fem regioner i Danmark et bestemt år.

	Hovedstaden	Sjælland	Syddanmark	Midtjylland	Nordjylland
Forventet andel i %	26	15	24	24	11

En stikprøve på 1005 familier med bil har givet følgende fordeling på de fem regioner i Danmark:

	Hovedstaden	Sjælland	Syddanmark	Midtjylland	Nordjylland
Antal	271	161	250	201	122

- a) Forklar, hvad der er stikprøve og population, og opstil en nulhypotese, som kan anvendes til at undersøge, om der er sket en ændring af fordelingen på de fem regioner.
- b) Undersøg på et 5% signifikansniveau, om nulhypotesen kan forkastes.

Opgave 13

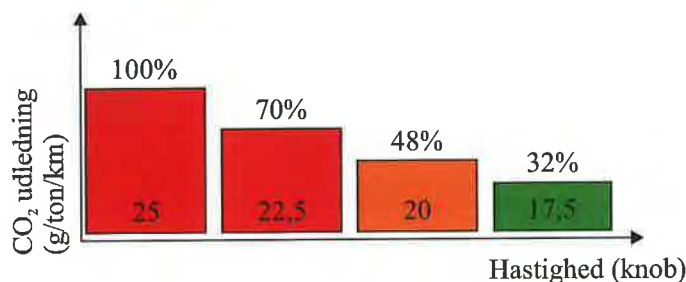
I en model for et containerskibs CO₂-udledning kan skibets CO₂-udledning beskrives ved en funktion U , der er løsning til differentialligningen

$$\frac{dU}{dx} = 0,1518 \cdot U$$

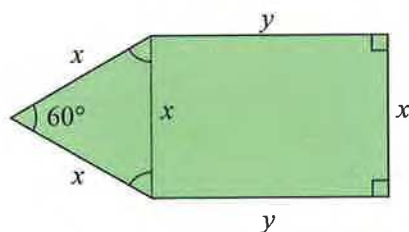
hvor U er skibets CO₂-udledning (målt i g/ton/km), og x er skibets fart (målt i knob).

I modellen er containerskibets CO₂-udledning på 6,25 g/ton/km, når skibets fart er 25 knob.

- Bestem en forskrift for U , og benyt denne til at bestemme skibets fart, når dets CO₂-udledning er 4 g/ton/km.
- Undersøg, om modellen understøtter påstanden, der fremgår af nedenstående figur, nemlig, at man kan reducere CO₂-udledningen fra 100% ved en fart på 25 knob til 32% ved en fart på 17,5 knob.



Opgave 14



En bestemt type byggegrund er sammensat af en ligesidet trekant med sidelængde x , og et rektangel med sidelængder x og y (se figur). Alle sidelængder måles i meter.

- Bestem byggegrundens omkreds og areal, når $x = 50$ og $y = 100$.

En bestemt byggegrund af denne type skal have en omkreds på 200 m.

- Bestem sidelængden y udtrykt ved x , og gør rede for, at byggegrundens areal T som funktion af x kan beskrives ved

$$T(x) = \left(\frac{\sqrt{3}}{4} - \frac{3}{2} \right) x^2 + 100x.$$

- Bestem de værdier af x og y , der gør arealet af denne byggegrund størst mulig, når $20 \leq x \leq 60$.



**UNDERVISNINGS
MINISTERIET**
KVALITETS- OG
TILSYNSSTYRELSEN

Matematik B

Studentereksamen

Opgavesættet er delt i to dele.

Delprøven uden hjælpemidler består af opgave 1-6 med i alt 6 spørgsmål.
Delprøven med hjælpemidler består af opgave 7-13 med i alt 14 spørgsmål.

De 20 spørgsmål indgår med lige vægt i bedømmelsen.

Bedømmelsen af det skriftlige eksamenssæt

I bedømmelsen af besvarelsen af de enkelte spørgsmål og i helhedsindtrykket vil der blive lagt vægt på, om eksaminandens tankegang fremgår klart af besvarelsen. Dette vurderes blandt andet ud fra kravene beskrevet i de følgende fem kategorier:

1. TEKST

Besvarelsen skal indeholde en forbindende tekst fra start til slut, der giver en klar præsentation af, hvad den enkelte opgave og de enkelte delspørgsmål går ud på.

2. NOTATION OG LAYOUT

Der kræves en hensigtsmæssig opstilling af besvarelsen i overensstemmelse med god matematisk skik, herunder en redegørelse for den matematiske notation, der indføres og anvendes, og som ikke kan henføres til standardviden.

3. REDEGØRELSE OG DOKUMENTATION

Besvarelsen skal indeholde en redegørelse for den anvendte fremgangsmåde og dokumentation i form af et passende antal mellemregninger og/eller en matematisk forklaring på brugen af de forskellige faciliteter, som et værktøjsprogram tilbyder.

4. FIGURER

I besvarelsen skal der indgå en hensigtsmæssig brug af figurer og illustrationer, og der skal være en tydelig sammenhæng mellem tekst og figurer.

5. KONKLUSION

Besvarelsen skal indeholde en afrunding af de forskellige spørgsmål med præcise konklusioner, præsenteret i et klart sprog og/eller med brug af almindelig matematisk notation.

Delprøven uden hjælpemidler

Kl. 09.00 – 10.00

- Opgave 1** På en solrig sommerdag vokser koncentrationen af alger i vandet ved en bestemt strand med 7% i timen. Det oplyses, at der til at begynde med er en koncentration af alger på 120 mio pr. L.

Indfør passende variable, og opstil en model for udviklingen i koncentrationen af alger som funktion af tiden.

- Opgave 2** Reducér $(a+b)^2 - a^2 - ab$.

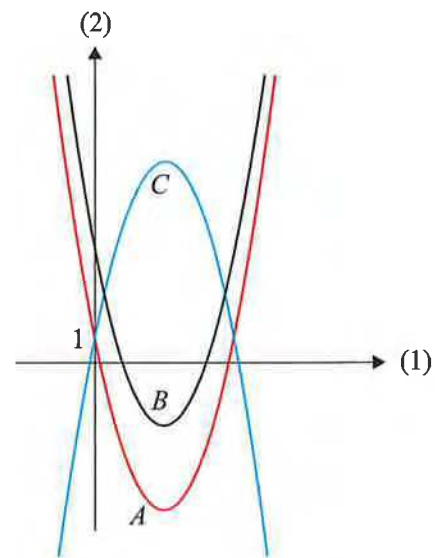
- Opgave 3** Løs andengradsligningen $x^2 + 2x - 8 = 0$.

- Opgave 4** En funktion f er givet ved

$$f(x) = x^2 - 5x + 1.$$

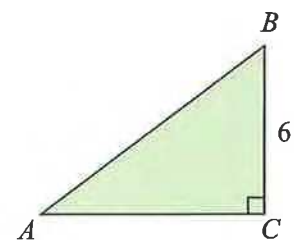
På figuren ses tre parabler A , B og C .

Argumentér for, hvilken af de tre parabler, der er graf for f .



- Opgave 5** Om en retvinklet trekant ABC oplyses, at arealet er 24, og den ene katete er 6.

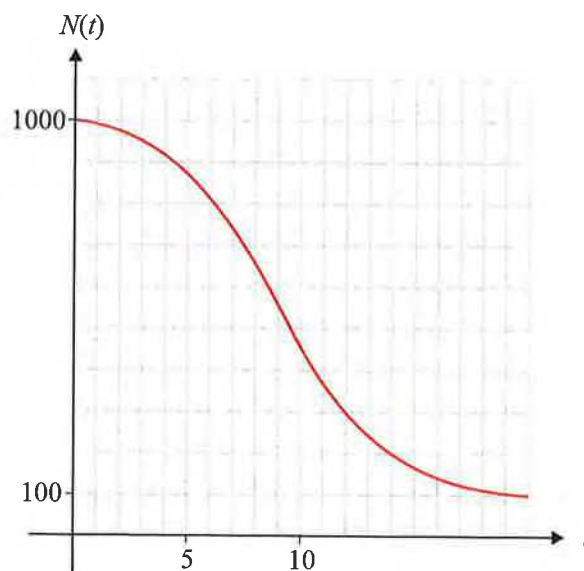
Bestem sidelængderne i trekant ABC .



Størrelsesforholdene er ikke korrekte

Opgave 6 I en model for udviklingen i antallet af individer i en population betegner $N(t)$ antallet af individer i populationen til tidspunktet t (målt i døgn). Nedenfor er vist en del af grafen for N .

Bilag vedlagt



Benyt grafen til at bestemme $N'(4)$, og gør rede for, hvad dette tal fortæller om udviklingen af antallet af individer i populationen. Benyt evt. vedlagte bilag 1.

Besvarelsen afleveres kl. 10.00

Delprøven med hjælpemidler

Kl. 09.00 – 13.00

Opgave 7



Foto: www.dreamstime.com

Tabellen viser udviklingen i den gennemsnitlige tilbagetrækningsalder fra arbejdsmarkedet for danske lønmodtagere i perioden 2006-2012.

Årstal	2006	2007	2008	2009	2010	2011	2012
Tilbagetrækningsalder (år)	62,01	62,25	62,47	62,75	62,77	63,00	63,08

I en model kan udviklingen beskrives ved

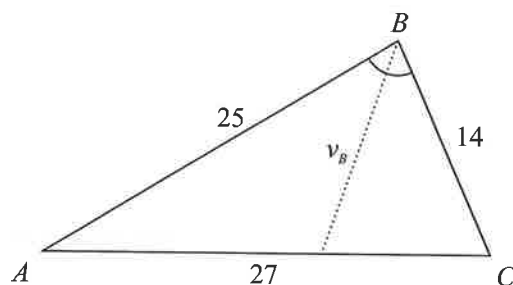
$$y = a \cdot x + b,$$

hvor y er den gennemsnitlige tilbagetrækningsalder for danske lønmodtagere til tidspunktet x (målt i år efter 2006).

- Benyt tabellens data til at bestemme konstanterne a og b .
- Benyt modellen til at bestemme den gennemsnitlige tilbagetrækningsalder for danske lønmodtagere i 2014, og giv en fortolkning af konstanten a .
- I hvilket år vil den gennemsnitlige tilbagetrækningsalder for danske lønmodtagere ifølge modellen overstige 65 år?

Kilde: Politiken 2.9.13

Opgave 8 I trekant ABC er $|AB| = 25$, $|BC| = 14$ og $|AC| = 27$.



- Bestem $\angle A$ og $\angle B$ i trekant ABC .
- Bestem arealet af trekant ABC , og bestem længden af vinkelhalveringslinjen v_B fra B .

Opgave 9 Massen af et bestemt radioaktivt stof aftager som funktion af tiden. Der er følgende sammenhæng mellem massen af det radioaktive stof og tiden t

$$f(t) = 12 \cdot 0,97^t,$$

hvor $f(t)$ er massen af det radioaktive stof målt i gram, og t er antal år efter 2014.

- Forklar, hvad tallene 12 og 0,97 fortæller om udviklingen i massen af det radioaktive stof.
- Bestem halveringstiden for massen af det radioaktive stof.

Opgave 10 En funktion f er bestemt ved

$$f(x) = 2x^3 - 57x^2 - 120x - 5.$$

- Opskriv en ligning for tangenten til grafen for f i punktet $P(1, f(1))$.
- Bestem monotoniforholdene for f .

Opgave 11 En funktion f er givet ved

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} + 2x, \quad x > 0.$$

- Bestem en forskrift for den stamfunktion til f , hvis graf går gennem punktet $P(4, 10)$.

Opgave 12 Et telesupportcenter har over en årrække opgjort ventetid for betjening af kunder, der ringer til telesupportcenteret. De fandt følgende fordeling af ventetid:

Ventetid (minutter)	0-5	5-10	10-15	15-20	20-25	25-30	>30
Fordeling	22,1%	17,2%	13,4%	10,4%	8,1%	6,3%	22,5%

For at undersøge om fordelingen af ventetid har ændret sig, udtager telesupportcenteret på tilfældig måde en stikprøve på 500 opkald fra kunder. Stikprøven indeholdt følgende fordeling af ventetid:

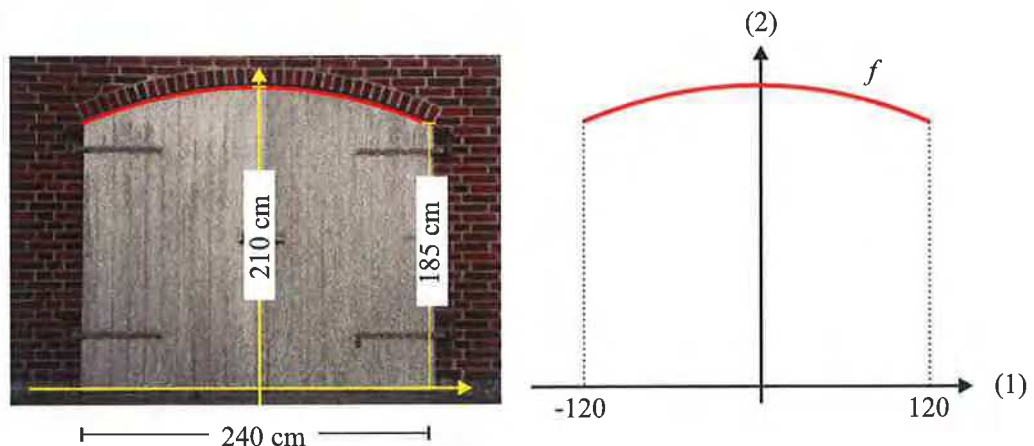
Ventetid (minutter)	0-5	5-10	10-15	15-20	20-25	25-30	>30
Antal	90	70	75	50	45	45	125

Man ønsker at undersøge nulhypotesen:

Fordelingen af ventetid for betjening af telesupportcenterets kunder, der ringer til telesupportcenteret, har ikke ændret sig.

- Beregn med udgangspunkt i nulhypotesen den forventede fordeling af ventetid i stikprøven.
- Undersøg på et 5% signifikansniveau, om nulhypotesen kan forkastes.

Opgave 13



Figuren viser en garageport, som har bredden 240 cm, højden 185 cm ved hængslerne og højden 210 cm midt på porten.

I en model kan den øverste bue af garageporten beskrives ved en del af grafen for et andengradspolynomium f . Modellen er indtegnet i et koordinatsystem, hvor førsteaksen følger portens nederste kant, og andenaksen følger midten af porten.

- Gør rede for, at en forskrift for f kan skrives som

$$f(x) = -0,001736 \cdot x^2 + 210.$$

- Benyt modellen til at bestemme arealet af garageporten.

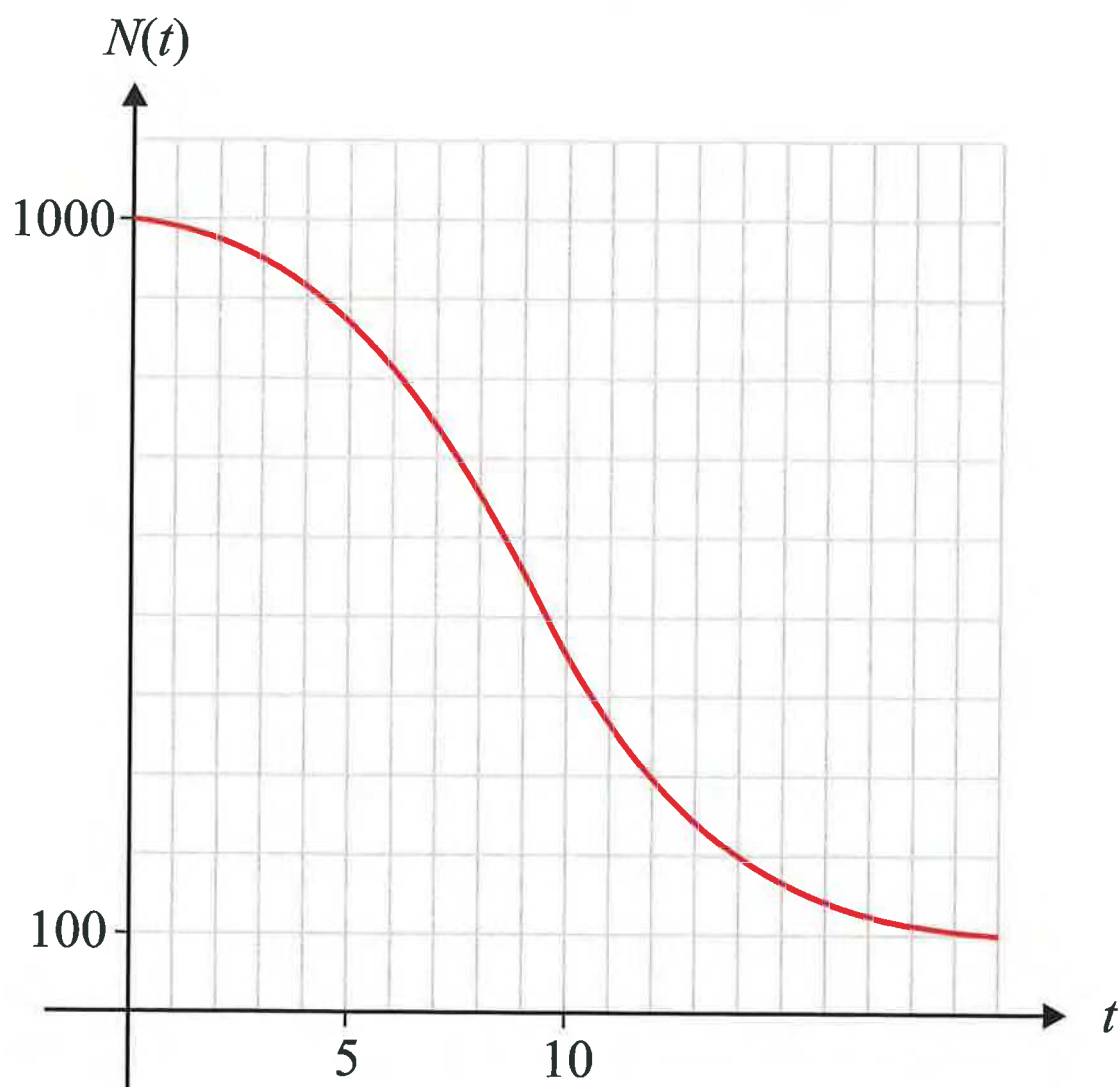
BILAG 1

Stx matematik B maj 2014

Bilaget kan indgå i besvarelsen.

Skole	Hold		ID
Navn	Ark nr	Antal ark i alt	Tilsynsførende

6



MATEMATIK A-NIVEAU

tirsdag 27. maj 2014

Kl. 09.00 – 14.00

Opgavesættet er delt i to dele.

Delprøven uden hjælpemidler består af opgave 1-6 med i alt 6 spørgsmål.
Delprøven med hjælpemidler består af opgave 7-14 med i alt 19 spørgsmål.

De 25 spørgsmål indgår med lige vægt i bedømmelsen.

Bedømmelsen af det skriftlige eksamenssæt

I bedømmelsen af besvarelsen af de enkelte spørgsmål og i helhedsindtrykket vil der blive lagt vægt på, om eksaminandens tankegang fremgår klart af besvarelsen. Dette vurderes blandt andet ud fra kravene beskrevet i de følgende fem kategorier:

1. TEKST

Besvarelsen skal indeholde en forbindende tekst fra start til slut, der giver en klar præsentation af, hvad den enkelte opgave og de enkelte delspørgsmål går ud på.

2. NOTATION OG LAYOUT

Der kræves en hensigtsmæssig opstilling af besvarelsen i overensstemmelse med god matematisk skik, herunder en redegørelse for den matematiske notation, der indføres og anvendes, og som ikke kan henføres til standardviden.

3. REDEGØRELSE OG DOKUMENTATION

Besvarelsen skal indeholde en redegørelse for den anvendte fremgangsmåde og dokumentation i form af et passende antal mellemregninger og/eller en matematisk forklaring på brugen af de forskellige faciliteter, som et værktøjsprogram tilbyder.

4. FIGURER

I besvarelsen skal der indgå en hensigtsmæssig brug af figurer og illustrationer, og der skal være en tydelig sammenhæng mellem tekst og figurer.

5. KONKLUSION

Besvarelsen skal indeholde en afrunding af de forskellige spørgsmål med præcise konklusioner, præsenteret i et klart sprog og/eller med brug af almindelig matematisk notation.

Delprøven uden hjælpemidler

Kl. 09.00 – 10.00

Opgave 1 Reducér udtrykket $(p - q)^2 + 2pq - q^2$.

Opgave 2 Løs andengradsligningen $2x^2 + x - 15 = 0$.

Opgave 3 I en model kan udviklingen i koncentrationen af en bestemt type medicin i blodet hos en person beskrives ved

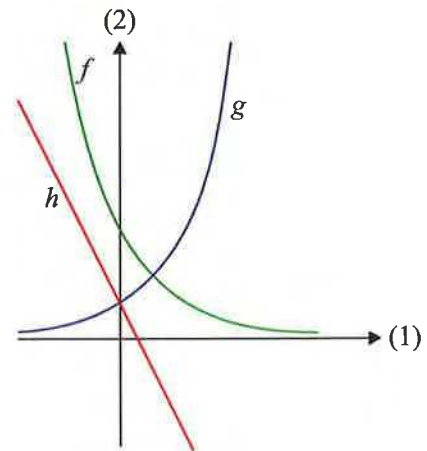
$$C(t) = 1,5 \cdot 0,64^t,$$

hvor $C(t)$ beskriver koncentrationen af medicinen i blodet (målt i mg/mL) til tidspunktet t (målt i timer efter medicinen er sprøjtet ind i blodet).

Forklar betydningen af konstanterne i modellen.

Opgave 4 På figuren ses graferne for tre vækstmodeller $f(x)$, $g(x)$ og $h(x)$.

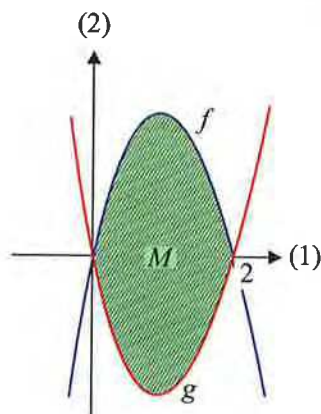
Bestem fortegnet for væksthastigheden for hver af de tre vækstmodeller, når $x = 0$. Begrund dit svar.



Opgave 5 Undersøg, om funktionen $f(x) = e^x - x^2 - 2x - 2$ er en løsning til differentialligningen

$$\frac{dy}{dx} = x^2 + y.$$

Opgave 6 På figuren ses en skitse af graferne for to funktioner f og g .



Graferne for f og g afgrænser en punktmængde M , der har et areal (se figuren).

Tabellen viser nogle funktionsværdier for funktionerne f , g , F og G , hvor F og G betegner henholdsvis en stamfunktion til f og en stamfunktion til g .

x	0	1	2
$f(x)$	0	49	0
$g(x)$	0	-47	0
$F(x)$	0	36	66
$G(x)$	0	-34	-62

Bestem arealet af M .

Besvarelsen afleveres kl. 10.00



**UNDERVISNINGS
MINISTERIET**
KVALITETS- OG
TILSYNSSTYRELSEN

Matematik A

Studentereksamen

Torsdag den 22. maj 2014
kl. 9.00 - 14.00

Delprøven uden hjælpemidler

Kl. 09.00 – 10.00

Opgave 1 En funktion f er bestemt ved

$$f(x) = 2x^2 + 4x - 6.$$

Grafen for f er en parabel.

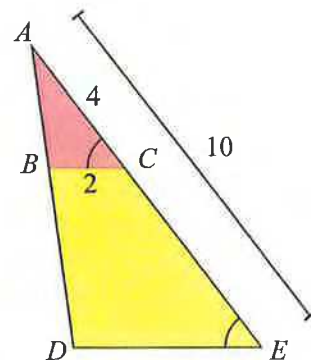
Bestem koordinatsættet til parablens toppunkt.

Opgave 2 På figuren ses en model af et sejl ADE .

Det oplyses, at DE og BC er parallelle,

samt at $|AE| = 10$, $|AC| = 4$ og $|BC| = 2$.

Bestem $|DE|$.



Opgave 3 Løs ligningssystemet

$$x + y = 11$$

$$6x + 2y = 42.$$

Opgave 4 En cirkel er bestemt ved ligningen $x^2 - 6x + y^2 + 2y - 26 = 0$.

Bestem cirkelens radius og koordinatsættet til cirkelens centrum.

Opgave 5 En funktion f er givet ved

$$f(x) = ax^3 + 5x^2 + 2x + 1,$$

hvor a er en konstant.

Bestem a , så $f'(1) = -3$.

Opgave 6 Bestem integralet

$$\int \frac{2x}{x^2 + 7} dx.$$

Besvarelsen afleveres kl. 10.00

Delprøven med hjælpemidler

Kl. 09.00 – 14.00

Opgave 7 Om trekant ABC oplyses, at $\angle A = 80^\circ$, $a = 12$ og $b = 11$.

- a) Bestem $\angle B$ og $\angle C$.
- b) Bestem længden af medianen m_a .

Opgave 8 I den internationale organisation ICCA har man siden 1963 opgjort det årlige antal møder. Tabellen viser det årlige antal møder for en række af årene efter 1963.

År efter 1963	0	5	10	15	20	25	30	35	40	45
Antal møder	359	539	811	1195	1717	2452	3372	5107	8164	10969

I en model antages, at sammenhængen mellem det årlige antal møder og antal år efter 1963 kan beskrives ved funktionen

$$M(t) = b \cdot a^t,$$

hvor $M(t)$ er det årlige antal møder, og t er antal år efter 1963.

- a) Benyt tabellens data til at bestemme konstanterne a og b .
- b) Benyt modellen til at bestemme det årlige antal møder i 2010, og bestem fordoblingskonstanten.
- c) Bestem $M'(37)$, og forklar betydningen af dette tal.

Kilde: A Modern History of International Association Meetings 1963 until 2013.

Opgave 9 En funktion f er givet ved

$$f(x) = x^3 - 5x^2 + 7,5x - 2.$$

- a) Skitsér grafen for f , og bestem en ligning for tangenten t til grafen for f i punktet $A(1, f(1))$.

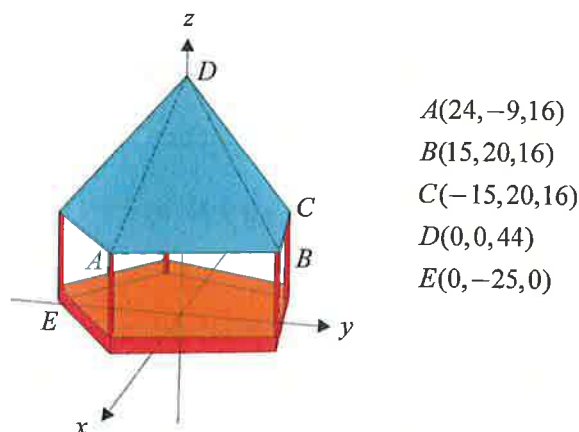
Tangenten t skærer grafen for f i et andet punkt B , og afgrænser sammen med grafen for f et område M , der har et areal.

- b) Bestem førstekoordinaten til punktet B , og bestem arealet af området M .

Opgave 10 En linje l går gennem to punkter $A(1,5)$ og $B(9,17)$.

- a) Bestem en parameterfremstilling for linjen l .
- b) Bestem koordinatsættet til projektionen af punktet $P(-10,21)$ på linjen l .

Opgave 11



På figuren ses en model af et fuglehus indtegnet i et koordinatsystem med enheden cm på hver af de tre akser. Koordinaterne til nogle af fuglehusets hjørner er angivet på figuren.

- a) Bestem en ligning for den plan α , der indeholder tagfladen ABD .

Det oplyses, at planen β , der indeholder tagfladen BCD , kan beskrives ved ligningen

$$\beta: 7y + 5z - 220 = 0.$$

- b) Bestem den stumpe vinkel mellem tagfladerne ABD og BCD .
- c) Bestem afstanden fra punktet E til tagfladen BCD .

Opgave 12

Tabellen viser, hvordan det samlede antal familier med bil var fordelt på de fem regioner i Danmark et bestemt år.

	Hovedstaden	Sjælland	Syddanmark	Midtjylland	Nordjylland
Forventet andel i %	26	15	24	24	11

En stikprøve på 1005 familier med bil har givet følgende fordeling på de fem regioner i Danmark:

	Hovedstaden	Sjælland	Syddanmark	Midtjylland	Nordjylland
Antal	271	161	250	201	122

- a) Forklar, hvad der er stikprøve og population, og opstil en nulhypotese, som kan anvendes til at undersøge, om der er sket en ændring af fordelingen på de fem regioner.
- b) Undersøg på et 5% signifikansniveau, om nulhypotesen kan forkastes.

Kilde: www.dst.dk

Opgave 13

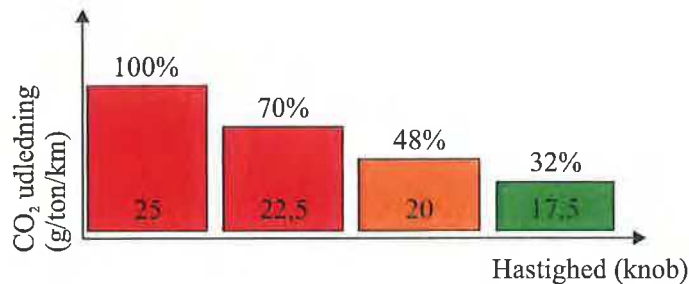
I en model for et containerskibs CO₂-udledning kan skibets CO₂-udledning beskrives ved en funktion U , der er løsning til differentialligningen

$$\frac{dU}{dx} = 0,1518 \cdot U$$

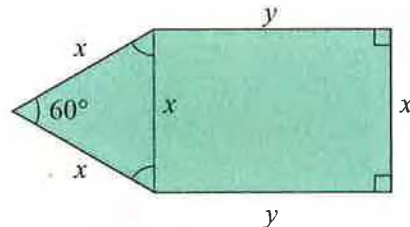
hvor U er skibets CO₂-udledning (målt i g/ton/km), og x er skibets fart (målt i knob).

I modellen er containerskibets CO₂-udledning på 6,25 g/ton/km, når skibets fart er 25 knob.

- Bestem en forskrift for U , og benyt denne til at bestemme skibets fart, når dets CO₂-udledning er 4 g/ton/km.
- Undersøg, om modellen understøtter påstanden, der fremgår af nedenstående figur, nemlig, at man kan reducere CO₂-udledningen fra 100% ved en fart på 25 knob til 32% ved en fart på 17,5 knob.



Opgave 14



En bestemt type byggegrund er sammensat af en ligesidet trekant med sidelængde x , og et rektangel med sidelængder x og y (se figur). Alle sidelængder måles i meter.

- Bestem byggegrundens omkreds og areal, når $x = 50$ og $y = 100$.

En bestemt byggegrund af denne type skal have en omkreds på 200 m.

- Bestem sidelængden y udtrykt ved x , og gør rede for, at byggegrundens areal T som funktion af x kan beskrives ved

$$T(x) = \left(\frac{\sqrt{3}}{4} - \frac{3}{2} \right) x^2 + 100x.$$

- Bestem de værdier af x og y , der gør arealet af denne byggegrund størst mulig, når $20 \leq x \leq 60$.



**UNDERVISNINGS
MINISTERIET**
KVALITETS- OG
TILSYNSSTYRELSEN

Matematik B

Studentereksamen

Opgavesættet er delt i to dele.

Delprøven uden hjælpemidler består af opgave 1-6 med i alt 6 spørgsmål.
Delprøven med hjælpemidler består af opgave 7-13 med i alt 14 spørgsmål.

De 20 spørgsmål indgår med lige vægt i bedømmelsen.

Bedømmelsen af det skriftlige eksamenssæt

I bedømmelsen af besvarelsen af de enkelte spørgsmål og i helhedsindtrykket vil der blive lagt vægt på, om eksaminandens tankegang fremgår klart af besvarelsen. Dette vurderes blandt andet ud fra kravene beskrevet i de følgende fem kategorier:

1. TEKST

Besvarelsen skal indeholde en forbindende tekst fra start til slut, der giver en klar præsentation af, hvad den enkelte opgave og de enkelte delspørgsmål går ud på.

2. NOTATION OG LAYOUT

Der kræves en hensigtsmæssig opstilling af besvarelsen i overensstemmelse med god matematisk skik, herunder en redegørelse for den matematiske notation, der indføres og anvendes, og som ikke kan henføres til standardviden.

3. REDEGØRELSE OG DOKUMENTATION

Besvarelsen skal indeholde en redegørelse for den anvendte fremgangsmåde og dokumentation i form af et passende antal mellemregninger og/eller en matematisk forklaring på brugen af de forskellige faciliteter, som et værktøjsprogram tilbyder.

4. FIGURER

I besvarelsen skal der indgå en hensigtsmæssig brug af figurer og illustrationer, og der skal være en tydelig sammenhæng mellem tekst og figurer.

5. KONKLUSION

Besvarelsen skal indeholde en afrunding af de forskellige spørgsmål med præcise konklusioner, præsenteret i et klart sprog og/eller med brug af almindelig matematisk notation.

Delprøven uden hjælpemidler

Kl. 09.00 – 10.00

- Opgave 1** På en solrig sommerdag vokser koncentrationen af alger i vandet ved en bestemt strand med 7% i timen. Det oplyses, at der til at begynde med er en koncentration af alger på 120 mio pr. L.

Indfør passende variable, og opstil en model for udviklingen i koncentrationen af alger som funktion af tiden.

- Opgave 2** Reducér $(a+b)^2 - a^2 - ab$.

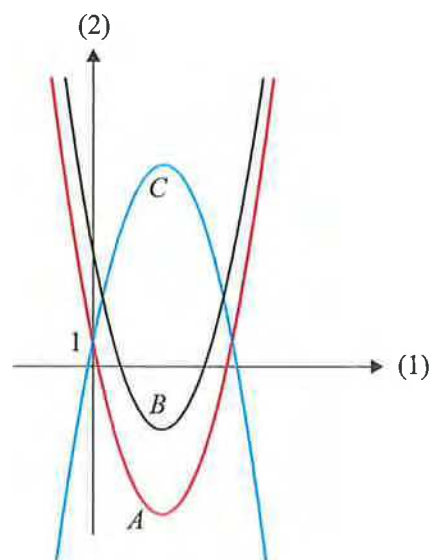
- Opgave 3** Løs andengradsligningen $x^2 + 2x - 8 = 0$.

- Opgave 4** En funktion f er givet ved

$$f(x) = x^2 - 5x + 1.$$

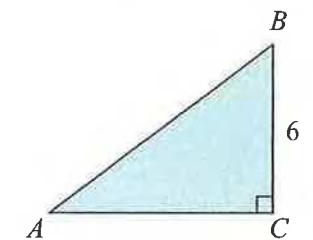
På figuren ses tre parabler A , B og C .

Argumentér for, hvilken af de tre parabler, der er graf for f .



- Opgave 5** Om en retvinklet trekant ABC oplyses, at arealet er 24, og den ene katete er 6.

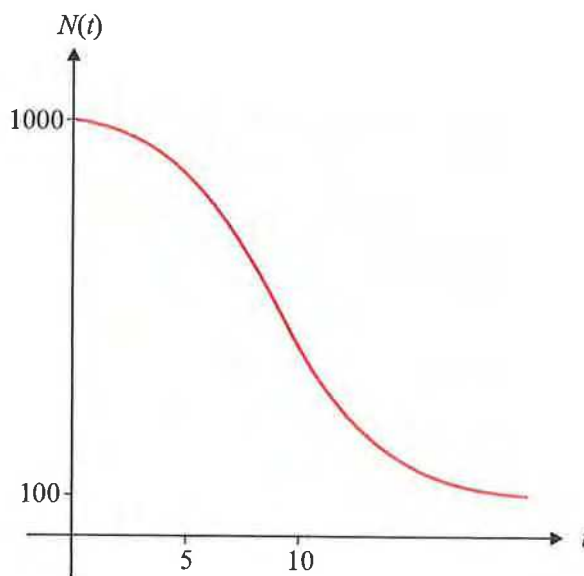
Bestem sidelængderne i trekant ABC .



Størrelsesforholdene er ikke korrekte

Opgave 6 I en model for udviklingen i antallet af individer i en population betegner $N(t)$ antallet af individer i populationen til tidspunktet t (målt i døgn). Nedenfor er vist en del af grafen for N .

Bilag vedlagt



Benyt grafen til at bestemme $N'(4)$, og gør rede for, hvad dette tal fortæller om udviklingen af antallet af individer i populationen. Benyt evt. vedlagte bilag 1.

Besvarelsen afleveres kl. 10.00

Delprøven med hjælpemidler

Kl. 09.00 – 13.00

Opgave 7



Foto: www.dreamstime.com

Tabellen viser udviklingen i den gennemsnitlige tilbagetrækningsalder fra arbejdsmarkedet for danske lønmodtagere i perioden 2006-2012.

Årstal	2006	2007	2008	2009	2010	2011	2012
Tilbagetrækningsalder (år)	62,01	62,25	62,47	62,75	62,77	63,00	63,08

I en model kan udviklingen beskrives ved

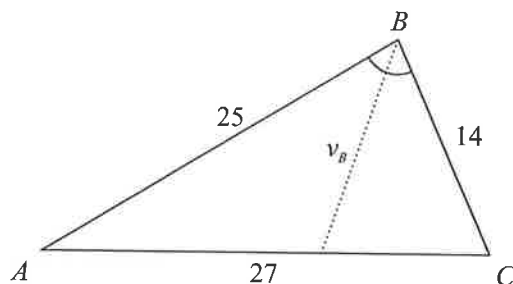
$$y = a \cdot x + b,$$

hvor y er den gennemsnitlige tilbagetrækningsalder for danske lønmodtagere til tidspunktet x (målt i år efter 2006).

- Benyt tabellens data til at bestemme konstanterne a og b .
- Benyt modellen til at bestemme den gennemsnitlige tilbagetrækningsalder for danske lønmodtagere i 2014, og giv en fortolkning af konstanten a .
- I hvilket år vil den gennemsnitlige tilbagetrækningsalder for danske lønmodtagere ifølge modellen overstige 65 år?

Kilde: Politiken 2.9.13

Opgave 8 I trekant ABC er $|AB| = 25$, $|BC| = 14$ og $|AC| = 27$.



- Bestem $\angle A$ og $\angle B$ i trekant ABC .
- Bestem arealet af trekant ABC , og bestem længden af vinkelhalveringslinjen v_B fra B .

Opgave 9 Massen af et bestemt radioaktivt stof aftager som funktion af tiden. Der er følgende sammenhæng mellem massen af det radioaktive stof og tiden t

$$f(t) = 12 \cdot 0,97^t,$$

hvor $f(t)$ er massen af det radioaktive stof målt i gram, og t er antal år efter 2014.

- Forklar, hvad tallene 12 og 0,97 fortæller om udviklingen i massen af det radioaktive stof.
- Bestem halveringstiden for massen af det radioaktive stof.

Opgave 10 En funktion f er bestemt ved

$$f(x) = 2x^3 - 57x^2 - 120x - 5.$$

- Opskriv en ligning for tangenten til grafen for f i punktet $P(1, f(1))$.
- Bestem monotoniforholdene for f .

Opgave 11 En funktion f er givet ved

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} + 2x, \quad x > 0.$$

- Bestem en forskrift for den stamfunktion til f , hvis graf går gennem punktet $P(4, 10)$.

Opgave 12

Et telesupportcenter har over en årrække opgjort ventetid for betjening af kunder, der ringer til telesupportcenteret. De fandt følgende fordeling af ventetid:

Ventetid (minutter)	0-5	5-10	10-15	15-20	20-25	25-30	>30
Fordeling	22,1%	17,2%	13,4%	10,4%	8,1%	6,3%	22,5%

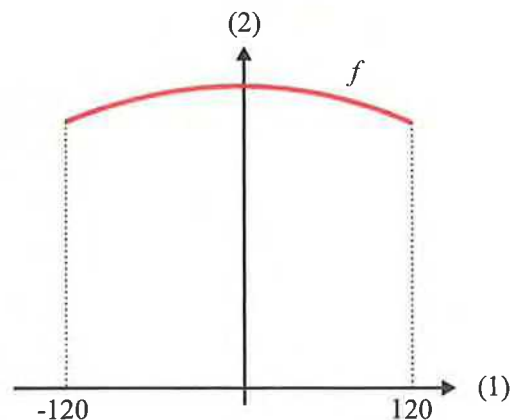
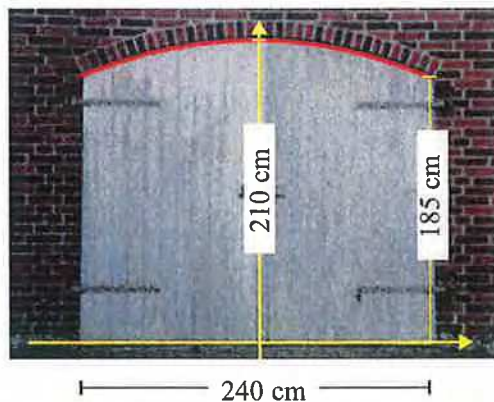
For at undersøge om fordelingen af ventetid har ændret sig, udtager telesupportcenteret på tilfældig måde en stikprøve på 500 opkald fra kunder. Stikprøven indeholdt følgende fordeling af ventetid:

Ventetid (minutter)	0-5	5-10	10-15	15-20	20-25	25-30	>30
Antal	90	70	75	50	45	45	125

Man ønsker at undersøge nulhypotesen:

Fordelingen af ventetid for betjening af telesupportcenterets kunder, der ringer til telesupportcenteret, har ikke ændret sig.

- Beregn med udgangspunkt i nulhypotesen den forventede fordeling af ventetid i stikprøven.
- Undersøg på et 5% signifikansniveau, om nulhypotesen kan forkastes.

Opgave 13

Figuren viser en garageport, som har bredden 240 cm, højden 185 cm ved hængslerne og højden 210 cm midt på porten.

I en model kan den øverste bue af garageporten beskrives ved en del af grafen for et andengradspolynomium f . Modellen er indtegnet i et koordinatsystem, hvor førsteaksen følger portens nederste kant, og andenaksen følger midten af porten.

- Gør rede for, at en forskrift for f kan skrives som

$$f(x) = -0,001736 \cdot x^2 + 210.$$

- Benyt modellen til at bestemme arealet af garageporten.

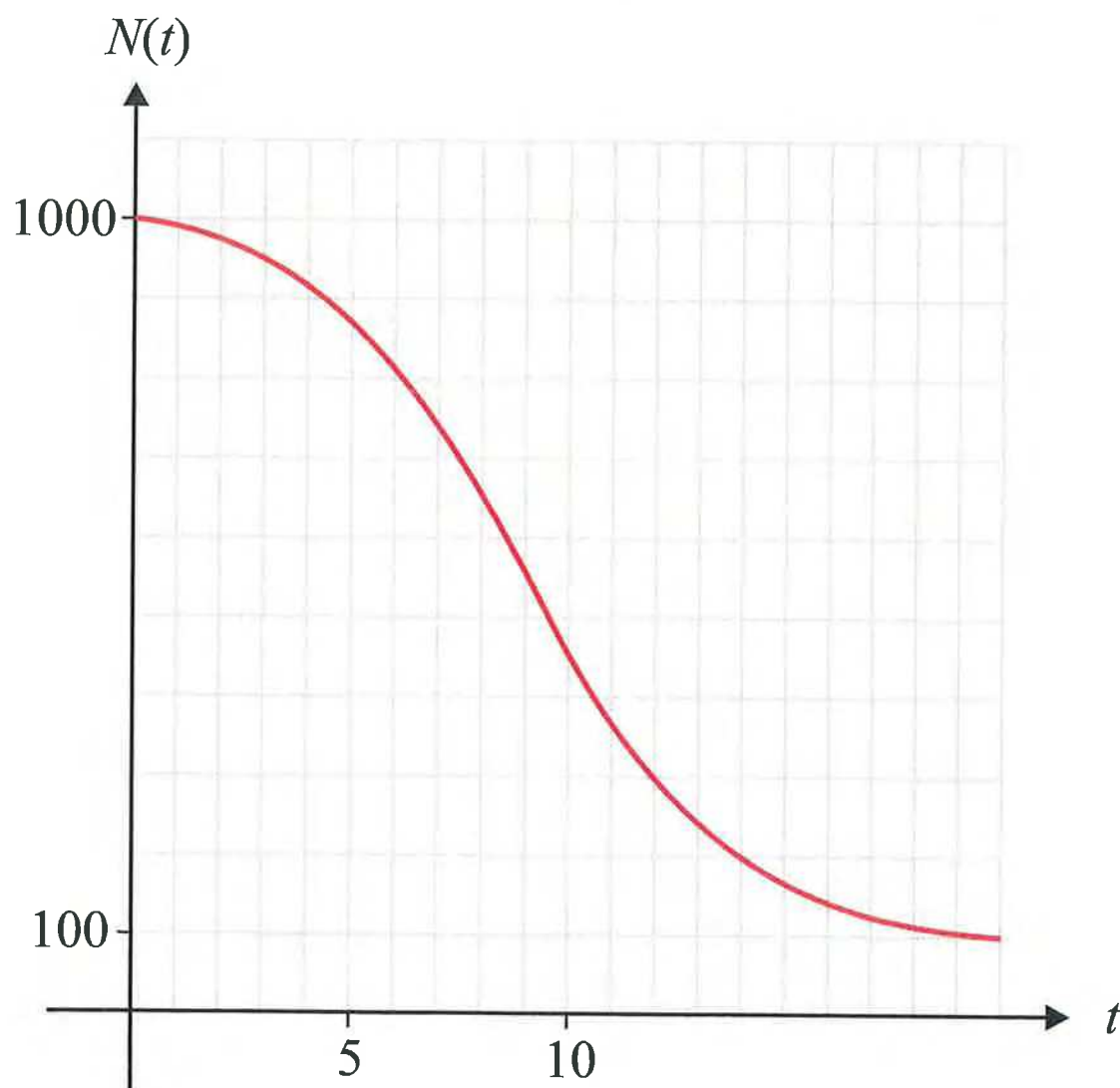
BILAG 1

Stx matematik B maj 2014

Bilaget kan indgå i besvarelsen.

Skole	Hold		ID
Navn	Ark nr	Antal ark i alt	Tilsynsførende

6



MATEMATIK A-NIVEAU

tirsdag 27. maj 2014

Kl. 09.00 – 14.00

Opgavesættet er delt i to dele.

Delprøven uden hjælpemidler består af opgave 1-6 med i alt 6 spørgsmål.
Delprøven med hjælpemidler består af opgave 7-14 med i alt 19 spørgsmål.

De 25 spørgsmål indgår med lige vægt i bedømmelsen.

Bedømmelsen af det skriftlige eksamenssæt

I bedømmelsen af besvarelsen af de enkelte spørgsmål og i helhedsindtrykket vil der blive lagt vægt på, om eksaminandens tankegang fremgår klart af besvarelsen. Dette vurderes blandt andet ud fra kravene beskrevet i de følgende fem kategorier:

1. TEKST

Besvarelsen skal indeholde en forbindende tekst fra start til slut, der giver en klar præsentation af, hvad den enkelte opgave og de enkelte delspørgsmål går ud på.

2. NOTATION OG LAYOUT

Der kræves en hensigtsmæssig opstilling af besvarelsen i overensstemmelse med god matematisk skik, herunder en redegørelse for den matematiske notation, der indføres og anvendes, og som ikke kan henføres til standardviden.

3. REDEGØRELSE OG DOKUMENTATION

Besvarelsen skal indeholde en redegørelse for den anvendte fremgangsmåde og dokumentation i form af et passende antal mellemregninger og/eller en matematisk forklaring på brugen af de forskellige faciliteter, som et værktøjsprogram tilbyder.

4. FIGURER

I besvarelsen skal der indgå en hensigtsmæssig brug af figurer og illustrationer, og der skal være en tydelig sammenhæng mellem tekst og figurer.

5. KONKLUSION

Besvarelsen skal indeholde en afrunding af de forskellige spørgsmål med præcise konklusioner, præsenteret i et klart sprog og/eller med brug af almindelig matematisk notation.

Delprøven uden hjælpemidler

Kl. 09.00 – 10.00

Opgave 1 Reducér udtrykket $(p - q)^2 + 2pq - q^2$.

Opgave 2 Løs andengradsligningen $2x^2 + x - 15 = 0$.

Opgave 3 I en model kan udviklingen i koncentrationen af en bestemt type medicin i blodet hos en person beskrives ved

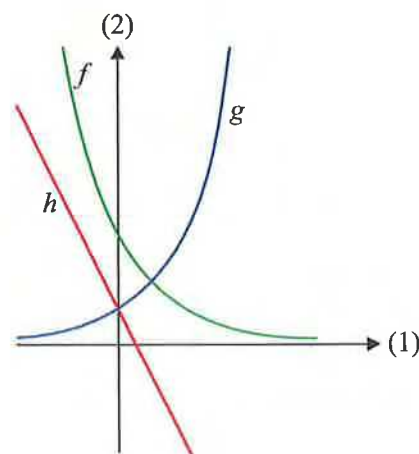
$$C(t) = 1,5 \cdot 0,64^t,$$

hvor $C(t)$ beskriver koncentrationen af medicinen i blodet (målt i mg/mL) til tidspunktet t (målt i timer efter medicinen er sprøjtet ind i blodet).

Forklar betydningen af konstanterne i modellen.

Opgave 4 På figuren ses graferne for tre vækstmodeller $f(x)$, $g(x)$ og $h(x)$.

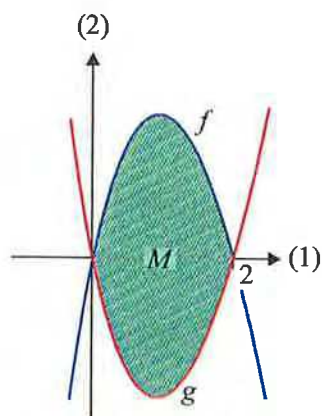
Bestem fortegnet for væksthastigheden for hver af de tre vækstmodeller, når $x = 0$. Begrund dit svar.



Opgave 5 Undersøg, om funktionen $f(x) = e^x - x^2 - 2x - 2$ er en løsning til differentialligningen

$$\frac{dy}{dx} = x^2 + y.$$

Opgave 6 På figuren ses en skitse af graferne for to funktioner f og g .



Graferne for f og g afgrænser en punktmængde M , der har et areal (se figuren).

Tabellen viser nogle funktionsværdier for funktionerne f , g , F og G , hvor F og G betegner henholdsvis en stamfunktion til f og en stamfunktion til g .

x	0	1	2
$f(x)$	0	49	0
$g(x)$	0	-47	0
$F(x)$	0	36	66
$G(x)$	0	-34	-62

Bestem arealet af M .

Besvarelsen afleveres kl. 10.00

Delprøven med hjælpemidler

Kl. 09.00 – 14.00

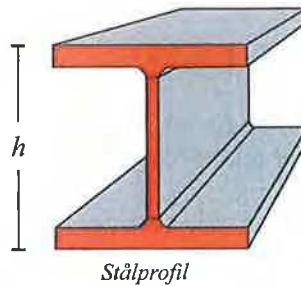
Opgave 7 To vektorer $\vec{a}$ og $\vec{b}$ i planen er givet ved

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 7 \\ 3 \end{pmatrix} \text{ og } \vec{b} = \begin{pmatrix} t \\ 6 \end{pmatrix},$$

hvor t er et tal.

- a) Bestem vinklen mellem vektorerne $\vec{a}$ og $\vec{b}$, når $t = 2$.
- b) Bestem t , så $\det(\vec{a}, \vec{b}) = 30$.

Opgave 8



Tabellen viser sammenhørende værdier af et bestemt stålprofils højde og belastningsevne.

Højde (mm)	359	395	432	478	524	572	620	716
Belastningsevne (10^3 mm^3)	3800	4300	4820	5500	6180	6920	7660	9200

I en model kan sammenhængen beskrives ved en funktion af typen

$$f(h) = b \cdot h^a,$$

hvor $f(h)$ er belastningsevnen (målt i 10^3 mm^3) ved en højde på h (målt i mm).

- a) Benyt tabellens data til at bestemme konstanterne a og b .
- b) Benyt modellen til at bestemme belastningsevnen af et stålprofil med en højde på 668 mm.
- c) Benyt modellen til at bestemme, hvor mange procent belastningsevnen øges med, når højden på stålprofilet øges med 15%.

Kilde: Teknisk Ståbi, 18. udgave, Teknisk Forlag.

Opgave 9 En funktion f er bestemt ved

$$f(x) = \ln(x^2 + 5) + 0,5x + 1.$$

- a) Skitsér grafen for f , og bestem førstekoordinaten til grafens skæringspunkt med førsteaksen.

Grafen for f og koordinatsystemets akser afgrænser i 2. kvadrant en punktmængde M , der har et areal.

- b) Bestem arealet af M .

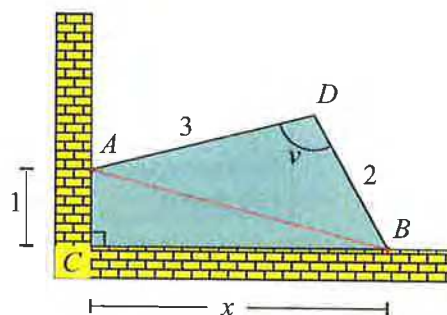
Opgave 10 I tabellen ses aldersfordelingen af de 16362 kvinder i Danmark, der i 2010 fik en abort.

Alder (år)	15 – 20	20 – 25	25 – 30	30 – 35	35 – 40	40 – 45	45 – 50
Antal kvinder	2580	4141	3002	2968	2508	1069	94

- a) Bestem de kumulerede frekvenser, og tegn en sumkurve for aldersfordelingen.
- b) Bestem kvartilsættet for tabellens data, og bestem, hvor stor en procentdel af kvinderne der var fyldt 37 år, da de fik aborten.

Kilde: Danmarks statistik

Opgave 11 Der skal bygges en sandkasse i et retvinklet hjørne af en gård. Til at bygge sandkassen skal der bruges to sider, hvor den ene er 2 m lang og den anden er 3 m lang. Den længste side skal fastgøres i punktet A , som ligger 1 m fra hjørnet af gården, og den korteste side skal fastgøres i B på den anden mur (se figuren).



- a) Bestem $|AB|$ og vinkel v , når $x = 4$.
- b) Bestem det samlede areal af de to trekanter ABC og ABD , når $x = 4$.

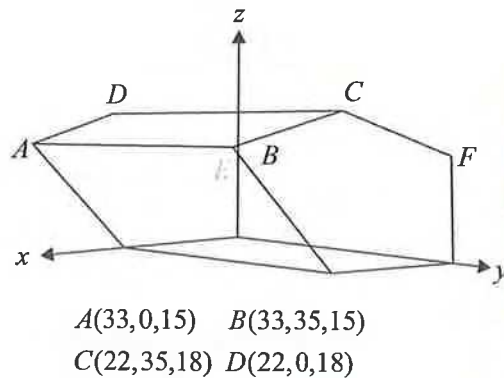
Det oplyses, at sandkassens areal T som funktion af x kan beskrives ved

$$T = \frac{1}{4} \cdot x \cdot \sqrt{24 - x^2} + \frac{1}{2} \cdot x, \quad \sqrt{8} < x < \sqrt{24}.$$

- c) Bestem den værdi af x , der giver sandkassen det størst mulige areal.

Opgave 12

På figuren ses en model af et shelter indtegnet i et koordinatsystem med enheden dm på hver af de tre akser. Koordinatsættene til nogle af hjørnepunkterne er opgivet på figuren.



- a) Bestem en ligning for planen α , der indeholder tagfladen $ABCD$.

Det oplyses, at planen β , der indeholder tagfladen $CDEF$, er givet ved ligningen

$$-210x + 770z - 9240 = 0.$$

- b) Bestem den stumpe vinkel mellem tagfladerne $ABCD$ og $CDEF$.
- c) Redegør for, at firkant $ABCD$ er et parallelogram, og bestem arealet af tagfladen $ABCD$.

Opgave 13

En trigonometrisk funktion f er givet ved

$$f(x) = 3 \sin(2x + 0,7) + 1.$$

- a) Bestem en ligning for tangenten til grafen for f i punktet $P(3, f(3))$.
- b) Bestem største- og mindsteværdi, samt perioden for f .

Opgave 14

En beholder placeres i et vandbad under opvarmning. I en model kan udviklingen i beholderens temperatur i de første 40 minutter beskrives ved differentialligningen

$$\frac{dy}{dt} = a \cdot (20 + 5t - y),$$

hvor y er temperaturen (målt i $^{\circ}\text{C}$) i beholderen til tidspunktet t (målt i minutter), og a er en konstant. Til tidspunktet $t = 0$ er temperaturen i beholderen 20°C .

- a) Sæt $a = 0,07$. Bestem y som funktion af tiden t , og bestem temperaturen, når der er gået 16 minutter.

Efter 16 minutter viser det sig, at temperaturen i beholderen kun er 50°C .

- b) Benyt dette til at bestemme den faktiske værdi af konstanten a .



**UNDERVISNINGS
MINISTERIET**
KVALITETS- OG
TILSYNSSTYRELSEN

Matematik A

Studentereksamen

Digital eksamensopgave med adgang til internettet

Opgavesættet er delt i to dele.

Delprøven uden hjælpemidler består af 12 spørgsmål.

Delprøven med hjælpemidler består af 13 spørgsmål.

De 25 spørgsmål indgår med lige vægt i bedømmelsen.

Bedømmelsen af det skriftlige eksamenssæt

I bedømmelsen af besvarelsen af de enkelte spørgsmål og i helhedsindtrykket vil der blive lagt vægt på, om eksaminandens tankegang fremgår klart af besvarelsen. Dette vurderes blandt andet ud fra kravene beskrevet i de følgende fem kategorier:

1. TEKST

Besvarelsen skal indeholde en forbindende tekst fra start til slut, der giver en klar præsentation af, hvad den enkelte opgave og de enkelte delspørgsmål går ud på.

2. NOTATION OG LAYOUT

Der kræves en hensigtsmæssig opstilling af besvarelsen i overensstemmelse med god matematisk skik, herunder en redegørelse for den matematiske notation, der indføres og anvendes, og som ikke kan henføres til standardviden.

3. REDEGØRELSE OG DOKUMENTATION

Besvarelsen skal indeholde en redegørelse for den anvendte fremgangsmåde og dokumentation i form af et passende antal mellemregninger og/eller en matematisk forklaring på brugen af de forskellige faciliteter, som et værktøjsprogram tilbyder.

4. FIGURER

I besvarelsen skal der indgå en hensigtsmæssig brug af figurer og illustrationer, og der skal være en tydelig sammenhæng mellem tekst og figurer.

5. KONKLUSION

Besvarelsen skal indeholde en afrunding af de forskellige spørgsmål med præcise konklusioner, præsenteret i et klart sprog og/eller med brug af almindelig matematisk notation.

Delprøven uden hjælpemidler

Kl. 09.00 – 11.00

Opgave 1 I et koordinatsystem i planen er to vektorer $\vec{a}$ og $\vec{b}$ bestemt ved

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} \text{ og } \vec{b} = \begin{pmatrix} -1 \\ t \end{pmatrix},$$

hvor t er et tal.

- a) Bestem arealet af det parallellogram, som de to vektorer $\vec{a}$ og $\vec{b}$ udspænder, når $t = 1$.
- b) Bestem tallet t , så $\vec{a}$ og $\vec{b}$ er ortogonale.

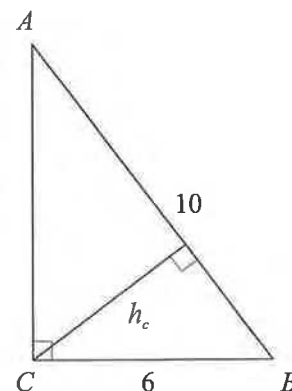
Opgave 2 To størrelser x og y er ligefrem proportionale.

x	2	3	s
y	t	18	30

- a) Bestem tallene s og t .

Opgave 3 I en retvinklet trekant ABC , hvor $\angle C = 90^\circ$, er $|AB| = 10$ og $|BC| = 6$.

- a) Bestem $|AC|$, og bestem arealet af trekant ABC .
- b) Bestem højden h_c .



Opgave 4 En funktion f er givet ved

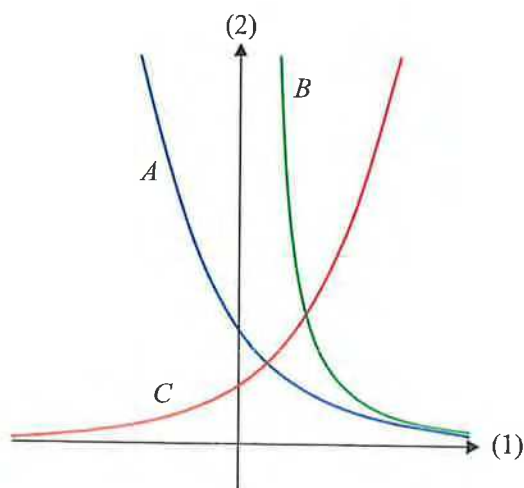
$$f(x) = a \cdot x^2 - 4x - 10.$$

Grafen for f er en parabel, som har toppunkt i $T(-2, -6)$.

- a) Bestem konstanten a .

Opgave 5 Hver af de tre grafer A , B og C på figuren er graf for en af de tre funktioner f , g og h . De tre funktioner er bestemt ved

$$f(x) = 2^x, \quad g(x) = 3 \cdot x^{-2} \quad \text{og} \quad h(x) = 2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^x.$$



- a) Gør for hver af graferne A , B og C rede for, hvilken af de tre funktioner den er graf for.

Opgave 6 En funktion f er bestemt ved

$$f(x) = 2x^3 + 7.$$

- a) Bestem den stamfunktion til f , hvis graf går gennem punktet $P(2, 8)$.

Opgave 7 En funktion f er løsning til differentialligningen

$$\frac{dy}{dx} = x \cdot y + 3x.$$

Grafen for f går gennem punktet $P(2, 5)$.

- a) Bestem en ligning for tangenten til grafen for f i punktet P .

Opgave 8 En cirkel er givet ved ligningen

$$x^2 - 6x + y^2 + 2y + 1 = 0.$$

- a) Bestem cirkelens radius og koordinatsættet til cirkelens centrum.
- b) Undersøg, om linjen med ligningen $3x - 4y + 3 = 0$ er en tangent til cirklen.

Opgave 9 En differentiabel funktion f opfylder, at

$$f(0) = 2 \text{ og } f(5) = 0,$$

og, at fortegn og nulpunkter for f' er som angivet på tallinjen:

x						
		-2		5		
$f'(x)$	+	0	-	0	+	

a) Tegn en skitse af en mulig graf for funktionen f .

Besvarelsen afleveres kl. 11.00

Delprøven med hjælpemidler

Kl. 09.00 – 14.00

Opgave 10 I trekant ABC er $|AC| = 10$, $|BC| = 8$ og $\angle A = 43^\circ$. Det oplyses, at vinkel B er stump.

- a) Tegn en skitse af trekant ABC , og bestem $\angle B$.

Opgave 11



I en model kan længden af en bestemt type grønne leguaner som funktion af deres alder beskrives ved

$$f(x) = \frac{160}{1 + 799 \cdot e^{-2,59x}}, \quad 0 \leq x \leq 20,$$

hvor $f(x)$ er længden (målt i cm), og x er alderen (målt i år).

- a) Tegn grafen for f , og bestem alderen for en grøn leguan, der er 140 cm lang.
- b) Bestem $f'(2)$, og giv en fortolkning af dette tal.
- c) Benyt modellen til at bestemme længden af en grøn leguan, når dens væksthastighed er størst.

Opgave 12 Man ønsker at undersøge, om den personlige holdning til sammenlægning af to skoler i en kommune afhænger af personens køn. Der er udtaget en stikprøve på 400 personer i kommunen. Stikprøvens fordeling på køn og holdning til sammenlægningen fremgår af tabellen.

	For	Imod	Ved ikke
Kvinder	40	93	13
Mænd	101	130	23

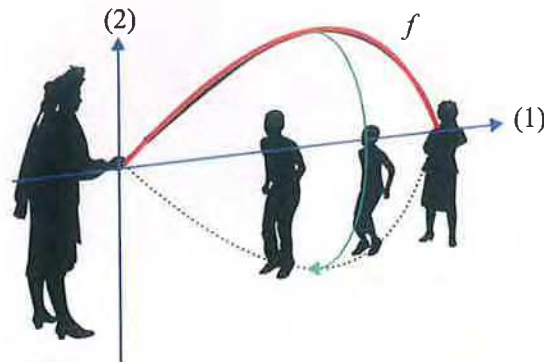
- a) Opstil en nulhypotese, der kan anvendes til at teste, om holdning til sammenlægning af de to skoler i kommunen afhænger af køn, og opskriv med udgangspunkt heri en tabel over de forventede værdier.
- b) Undersøg på et 5% signifikansniveau, om nulhypotesen kan forkastes.

Opgave 13 Funktionen $y(t)$ opfylder differentialligningen

$$3y''(t) + y'(t) - y(t) = 0.$$

- a) Bestem den partikulære løsning, der opfylder $y'(0) = 1$ og $y(0) = 1$. Tegn grafen for den partikulære løsning.

Opgave 14



Figuren viser et øjebliksbillede af et sjippetov indtegnet i et koordinatsystem med enheden meter på begge akser. I en model kan sjippetovets udseende beskrives ved grafen for funktionen

$$f(x) = 0,95 \cdot \sin(0,628 \cdot x), \quad 0 \leq x \leq 5.$$

- a) Bestem volumen af den luftmængde, der afsnøres, når sjippetorvet roteres 360° omkring førsteaksen.

Opgave 15



Fotos: www.colourbox.com

I en Lanchestermode for et tankslag mellem to hære, kan udviklingen i antallet af kampduelige tanks i hver af de to hære beskrives ved to funktioner u og v , der er løsning til differentialligningssystemet

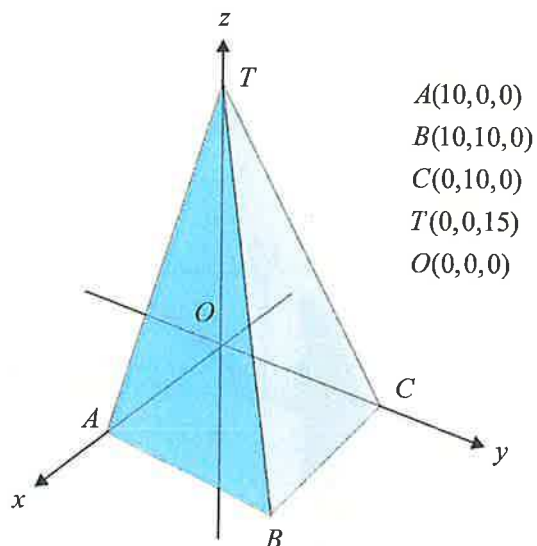
$$\begin{aligned} u'(t) &= -0,15v(t) \\ v'(t) &= -0,01u(t), \end{aligned}$$

hvor $u(t)$ og $v(t)$ er antallet af kampduelige tanks i hver af de to hære til tidspunktet t (målt i dage efter tankslagets begyndelse). Det oplyses, at $u(0) = 5128$ og $v(0) = 2928$.

- a) Bestem de partikulære løsninger $u(t)$ og $v(t)$ med de givne begyndelsesbetingelser, og bestem antallet af kampduelige tanks i hver af de to hære efter 5 dage.
- b) Tegn et retningsfelt med et faseplot, der opfylder ovenstående begyndelsesbetingelser, og benyt dette til at forudsige, hvilken af de to hære der vinder.

VEND!

- Opgave 16** Figuren viser en pyramide indtegnet i et koordinatsystem i rummet. Koordinatsættene til pyramidens hjørner er angivet på figuren.



- a) Bestem en ligning for den plan α , der indeholder fladen ABT .

Pyramiden gennemskæres af planen β , der er bestemt ved ligningen

$$\beta: -5x - 5y + 11z = 6.$$

- b) Bestem den spidse vinkel mellem α og β .

En kugle har centrum i T og har β som tangentplan.

- c) Bestem koordinatsættet til kuglens røringspunkt med β .



**UNDERVISNINGS
MINISTERIET**
KVALITETS- OG
TILSYNSSTYRELSEN

Matematik A

Studentereksamen

Tirsdag den 27. maj 2014
kl. 9.00 - 14.00

Opgavesættet er delt i to dele.

Delprøven uden hjælpemidler består af opgave 1-6 med i alt 6 spørgsmål.
Delprøven med hjælpemidler består af opgave 7-14 med i alt 19 spørgsmål.

De 25 spørgsmål indgår med lige vægt i bedømmelsen.

Bedømmelsen af det skriftlige eksamenssæt

I bedømmelsen af besvarelsen af de enkelte spørgsmål og i helhedsindtrykket vil der blive lagt vægt på, om eksaminandens tankegang fremgår klart af besvarelsen. Dette vurderes blandt andet ud fra kravene beskrevet i de følgende fem kategorier:

1. TEKST

Besvarelsen skal indeholde en forbindende tekst fra start til slut, der giver en klar præsentation af, hvad den enkelte opgave og de enkelte delspørgsmål går ud på.

2. NOTATION OG LAYOUT

Der kræves en hensigtsmæssig opstilling af besvarelsen i overensstemmelse med god matematisk skik, herunder en redegørelse for den matematiske notation, der indføres og anvendes, og som ikke kan henføres til standardviden.

3. REDEGØRELSE OG DOKUMENTATION

Besvarelsen skal indeholde en redegørelse for den anvendte fremgangsmåde og dokumentation i form af et passende antal mellemregninger og/eller en matematisk forklaring på brugen af de forskellige faciliteter, som et værktøjsprogram tilbyder.

4. FIGURER

I besvarelsen skal der indgå en hensigtsmæssig brug af figurer og illustrationer, og der skal være en tydelig sammenhæng mellem tekst og figurer.

5. KONKLUSION

Besvarelsen skal indeholde en afrunding af de forskellige spørgsmål med præcise konklusioner, præsenteret i et klart sprog og/eller med brug af almindelig matematisk notation.

Delprøven uden hjælpemidler

Kl. 09.00 – 10.00

Opgave 1 Reducér udtrykket $(p - q)^2 + 2pq - q^2$.

Opgave 2 Løs andengradsligningen $2x^2 + x - 15 = 0$.

Opgave 3 I en model kan udviklingen i koncentrationen af en bestemt type medicin i blodet hos en person beskrives ved

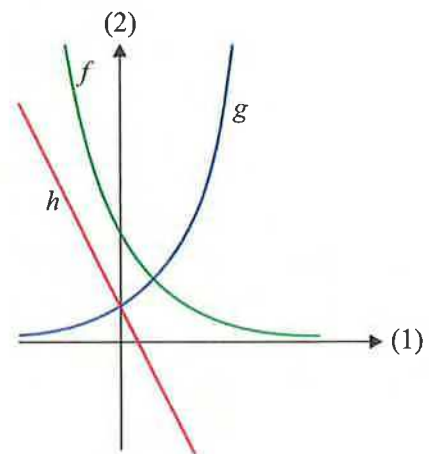
$$C(t) = 1,5 \cdot 0,64^t,$$

hvor $C(t)$ beskriver koncentrationen af medicinen i blodet (målt i mg/mL) til tidspunktet t (målt i timer efter medicinen er sprøjtet ind i blodet).

Forklar betydningen af konstanterne i modellen.

Opgave 4 På figuren ses graferne for tre vækstmodeller $f(x)$, $g(x)$ og $h(x)$.

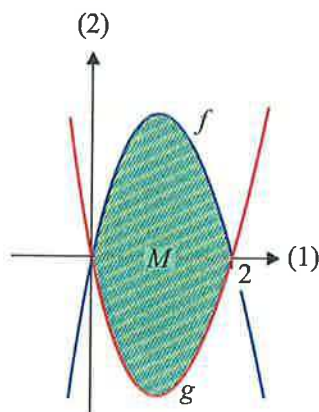
Bestem fortegnet for væksthastigheden for hver af de tre vækstmodeller, når $x = 0$. Begrund dit svar.



Opgave 5 Undersøg, om funktionen $f(x) = e^x - x^2 - 2x - 2$ er en løsning til differentialligningen

$$\frac{dy}{dx} = x^2 + y.$$

Opgave 6 På figuren ses en skitse af graferne for to funktioner f og g .



Graferne for f og g afgrænser en punktmængde M , der har et areal (se figuren).

Tabellen viser nogle funktionsværdier for funktionerne f , g , F og G , hvor F og G betegner henholdsvis en stamfunktion til f og en stamfunktion til g .

x	0	1	2
$f(x)$	0	49	0
$g(x)$	0	-47	0
$F(x)$	0	36	66
$G(x)$	0	-34	-62

Bestem arealet af M .

Besvarelsen afleveres kl. 10.00

Delprøven med hjælpemidler

Kl. 09.00 – 14.00

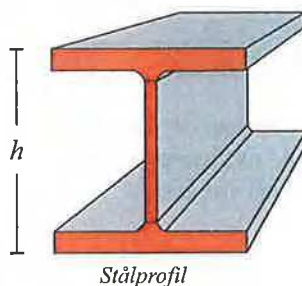
Opgave 7 To vektorer $\vec{a}$ og $\vec{b}$ i planen er givet ved

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 7 \\ 3 \end{pmatrix} \text{ og } \vec{b} = \begin{pmatrix} t \\ 6 \end{pmatrix},$$

hvor t er et tal.

- a) Bestem vinklen mellem vektorerne $\vec{a}$ og $\vec{b}$, når $t = 2$.
- b) Bestem t , så $\det(\vec{a}, \vec{b}) = 30$.

Opgave 8



Tabellen viser sammenhørende værdier af et bestemt stålsprofils højde og belastningsevne.

Højde (mm)	359	395	432	478	524	572	620	716
Belastningsevne (10^3 mm^3)	3800	4300	4820	5500	6180	6920	7660	9200

I en model kan sammenhængen beskrives ved en funktion af typen

$$f(h) = b \cdot h^a,$$

hvor $f(h)$ er belastningsevnen (målt i 10^3 mm^3) ved en højde på h (målt i mm).

- a) Benyt tabellens data til at bestemme konstanterne a og b .
- b) Benyt modellen til at bestemme belastningsevnen af et stålsprofil med en højde på 668 mm.
- c) Benyt modellen til at bestemme, hvor mange procent belastningsevnen øges med, når højden på stålsprofilet øges med 15%.

Kilde: Teknisk Ståbi, 18. udgave, Teknisk Forlag.

Opgave 9 En funktion f er bestemt ved

$$f(x) = \ln(x^2 + 5) + 0,5x + 1.$$

- a) Skitsér grafen for f , og bestem førstekoordinaten til grafens skæringspunkt med førsteaksen.

Grafen for f og koordinatsystemets akser afgrænser i 2. kvadrant en punktmængde M , der har et areal.

- b) Bestem arealet af M .

Opgave 10

I et afgrænset område ved et rev på kysten nær Belize har to biologer undersøgt en stikprøve af ål fordelt på art og opholdssted. Ålene i stikprøven var af henholdsvis *G. moringa* arten og *G. vicinus* arten, og ålene opholdt sig enten i græs, sand eller i en mellemting. Biologernes stikprøve gav følgende resultat:

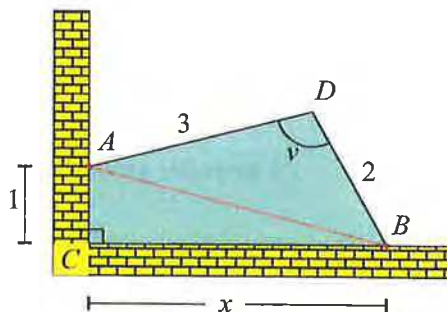
	Græs	Sand	Mellemting
<i>G. moringa</i>	127	99	264
<i>G. vicinus</i>	116	67	161

- a) Opstil en nulhypotese, der kan anvendes til at teste, om der er forskel på, hvilke opholdssteder de to ålearter foretrækker, og opstil med udgangspunkt heri en tabel over de forventede værdier.
- b) Undersøg på et 5% signifikansniveau, om nulhypotesen kan forkastes.

Kilde: "Handbook of biological statistics" <http://udel.edu/~mcdonald/statintro.html>

Opgave 11

Der skal bygges en sandkasse i et retvinklet hjørne af en gård. Til at bygge sandkassen skal der bruges to sider, hvor den ene er 2 m lang og den anden er 3 m lang. Den længste side skal fastgøres i punktet A , som ligger 1 m fra hjørnet af gården, og den korteste side skal fastgøres i B på den anden mur (se figuren).



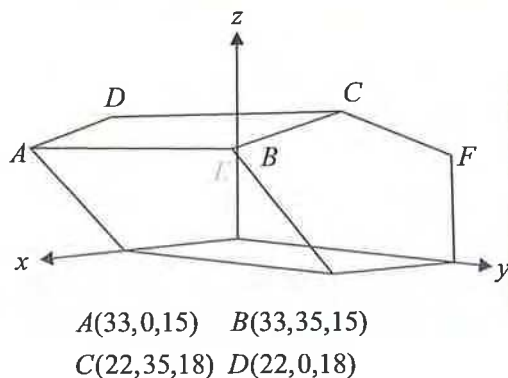
- a) Bestem $|AB|$ og vinkel v , når $x = 4$.
- b) Bestem det samlede areal af de to trekanter ABC og ABD , når $x = 4$.

Det oplyses, at sandkassens areal T som funktion af x kan beskrives ved

$$T = \frac{1}{4} \cdot x \cdot \sqrt{24 - x^2} + \frac{1}{2} \cdot x, \quad \sqrt{8} < x < \sqrt{24}.$$

- c) Bestem den værdi af x , der giver sandkassen det størst mulige areal.

- Opgave 12** På figuren ses en model af et shelter indtegnet i et koordinatsystem med enheden dm på hver af de tre akser. Koordinatsættene til nogle af hjørnepunkterne er opgivet på figuren.



- a) Bestem en ligning for planen α , der indeholder tagfladen $ABCD$.
- Det oplyses, at planen β , der indeholder tagfladen $CDEF$, er givet ved ligningen
- $$-210x + 770z - 9240 = 0.$$
- b) Bestem den stumpe vinkel mellem tagfladerne $ABCD$ og $CDEF$.
- c) Redegør for, at firkant $ABCD$ er et parallelogram, og bestem arealet af tagfladen $ABCD$.

- Opgave 13** En trigonometrisk funktion f er givet ved

$$f(x) = 3 \sin(2x + 0,7) + 1.$$

- a) Bestem en ligning for tangenten til grafen for f i punktet $P(3, f(3))$.
- b) Bestem største- og mindsteværdi samt perioden for f .

- Opgave 14** En beholder placeres i et vandbad under opvarmning. I en model kan udviklingen i beholderens temperatur i de første 40 minutter beskrives ved differentiallyigningen

$$\frac{dy}{dt} = a \cdot (20 + 5t - y),$$

hvor y er temperaturen (målt i $^{\circ}\text{C}$) i beholderen til tidspunktet t (målt i minutter), og a er en konstant. Til tidspunktet $t = 0$ er temperaturen i beholderen 20°C .

- a) Sæt $a = 0,07$. Bestem temperaturen y som funktion af tiden t , og bestem temperaturen, når der er gået 16 minutter.

Efter 16 minutter viser det sig, at temperaturen i beholderen kun er 50°C .

- b) Benyt dette til at bestemme den faktiske værdi af konstanten a .



**UNDERVISNINGS
MINISTERIET**
KVALITETS- OG
TILSYNSSTYRELSEN

Matematik B

Studentereksamen

Tirsdag den 27. maj 2014
kl. 9.00 - 13.00

Opgavesættet er delt i to dele.

Delprøven uden hjælpemidler består af opgave 1-6 med i alt 6 spørgsmål.
Delprøven med hjælpemidler består af opgave 7-13 med i alt 14 spørgsmål.

De 20 spørgsmål indgår med lige vægt i bedømmelsen.

Bedømmelsen af det skriftlige eksamenssæt

I bedømmelsen af besvarelsen af de enkelte spørgsmål og i helhedsindtrykket vil der blive lagt vægt på, om eksaminandens tankegang fremgår klart af besvarelsen. Dette vurderes blandt andet ud fra kravene beskrevet i de følgende fem kategorier:

1. TEKST

Besvarelsen skal indeholde en forbindende tekst fra start til slut, der giver en klar præsentation af, hvad den enkelte opgave og de enkelte delspørgsmål går ud på.

2. NOTATION OG LAYOUT

Der kræves en hensigtsmæssig opstilling af besvarelsen i overensstemmelse med god matematisk skik, herunder en redegørelse for den matematiske notation, der indføres og anvendes, og som ikke kan henføres til standardviden.

3. REDEGØRELSE OG DOKUMENTATION

Besvarelsen skal indeholde en redegørelse for den anvendte fremgangsmåde og dokumentation i form af et passende antal mellemregninger og/eller en matematisk forklaring på brugen af de forskellige faciliteter, som et værktøjsprogram tilbyder.

4. FIGURER

I besvarelsen skal der indgå en hensigtsmæssig brug af figurer og illustrationer, og der skal være en tydelig sammenhæng mellem tekst og figurer.

5. KONKLUSION

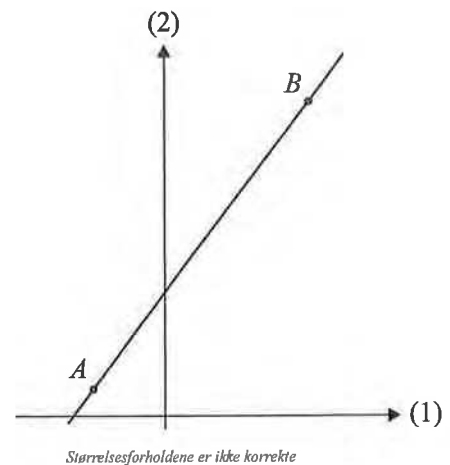
Besvarelsen skal indeholde en afrunding af de forskellige spørgsmål med præcise konklusioner, præsenteret i et klart sprog og/eller med brug af almindelig matematisk notation.

Delprøven uden hjælpemidler

Kl. 09.00 – 10.00

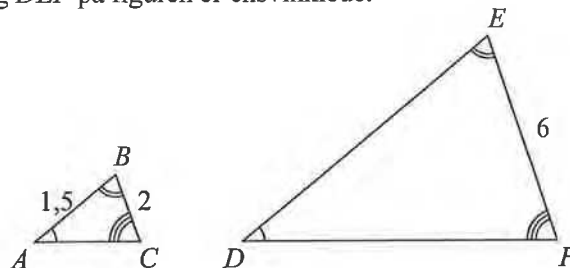
Opgave 1

Bestem en forskrift for den lineære funktion, hvis graf går gennem punkterne $A(-2,1)$ og $B(4,13)$.



Opgave 2

Trekanterne ABC og DEF på figuren er ensvinklede.



Bestem $|DE|$.

Opgave 3

En funktion f er bestemt ved

$$f(x) = 2x^3 + 4x + 7.$$

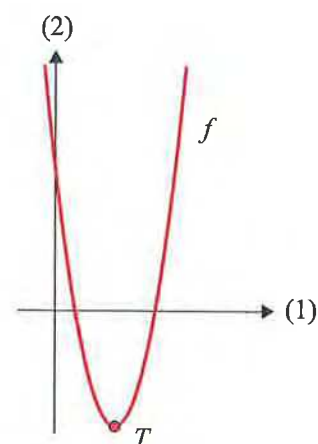
Bestem $f'(1)$.

Opgave 4 Grafen for funktionen

$$f(x) = 4x^2 - 8x + 2$$

er en parabel.

Bestem koordinatsættet til parablens toppunkt T .



Opgave 5 To størrelser x og y er omvendt proportionale.

x	10	20
y	4	

Udfyld resten af tabellen.

Opgave 6 En funktion f er bestemt ved

$$f(x) = 6x^2 - 8x.$$

Bestem en forskrift for den stamfunktion til f , hvis graf går gennem punktet $P(2, 13)$.

Besvarelsen afleveres kl. 10.00

Delprøven med hjælpemidler

Kl. 09.00 – 13.00

Opgave 7

For hvert år i perioden 2006-2012 har man opgjort procentdelen af 35-årige, der har gennemført en videregående uddannelse. Opgørelsen ses i nedenstående tabel.

År	2006	2007	2008	2009	2010	2011	2012
Procentdel	36,5	37,8	39,0	40,7	41,1	42,2	43,2

I en model antages det, at udviklingen i procentdelen af 35-årige, der har gennemført en videregående uddannelse, kan beskrives ved

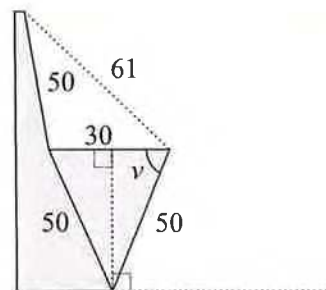
$$f(x) = a \cdot x + b,$$

hvor $f(x)$ er procentdelen af 35-årige, der har gennemført en videregående uddannelse, og x er antal år efter 2006.

- Benyt tabellens data til at bestemme tallene a og b .
- Benyt modellen til at bestemme procentdelen i 2015, og bestem det år, hvor procentdelen når op på 50%.

Kilde: www.dst.dk

Opgave 8



Størrelsesforholdene er ikke korrekte

På tegningen ses et billede af en cafébænk med vandret sæde samt en skitse af bænken endeflade. Alle mål på figuren er målt i cm.

- Bestem den lodrette afstand fra sædet til gulvet.
- Bestem vinkel v mellem sædet og den skrå flade mod gulvet.
- Bestem vinklen mellem sædet og ryglænet.

Opgave 9 I en model er udviklingen i verdens befolkningstal bestemt ved

$$f(x) = 2586 \cdot 1,017^x,$$

hvor $f(x)$ er verdens befolkningstal (målt i mio.), og x er antal år efter 1950.

- Benyt modellen til at forudsige verdens befolkningstal i år 2015.
- Forklar, hvad tallene 2586 og 1,017 fortæller om udviklingen i verdens befolkningstal.

Opgave 10 Antallet af individer i en bestemt population af dyr kan beskrives ved

$$N(t) = \frac{5000}{1 + 0,85^t},$$

hvor $N(t)$ er antallet af individer i populationen til tidspunktet t (målt i uger).

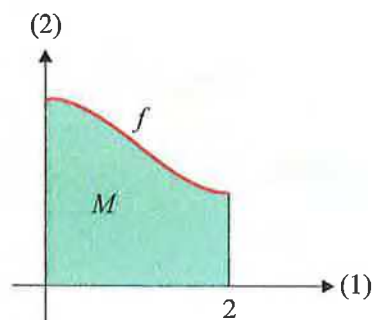
- Skitsér grafen for $N(t)$ i intervallet $0 \leq t \leq 40$, og bestem det tidspunkt, hvor der er 4000 individer i populationen.
- Bestem $N'(10)$, og forklar betydningen af dette tal.

Opgave 11 En funktion f er bestemt ved

$$f(x) = 0,25x^3 - 0,75x^2 + 2.$$

Tværsnittet af en bestemt type træliste har form som det område M , der i 1. kvadrant afgrænses af grafen for f , koordinataksene og den lodrette linje, der går gennem punktet $(2,0)$. Enheden på begge akser er cm.

- Bestem arealet af tværsnittet.



- Opgave 12** For at teste virkningen af en ny type vaccine mod allergi har man udtaget 600 personer. De 600 personer fik på tilfældig måde en af tre doser af vaccinen. Personerne blev delt i 3 grupper efter, hvor stor en dosis af vaccinen de fik. Resultatet af den oplevede virkning blandt personerne i hver af de tre grupper fremgår af tabellen.

	Forbedring	Ingen virkning	Forværring
Gruppe 1	55	70	75
Gruppe 2	62	76	62
Gruppe 3	78	78	44

- a) Opstil en nulhypotese, der kan anvendes til at teste, om oplevelsen af virkningen af den nye vaccine er uafhængig af dosis, og opstil på grundlag heraf en tabel over de forventede værdier.
- b) Undersøg, om nulhypotesen kan forkastes på et 1% signifikansniveau.

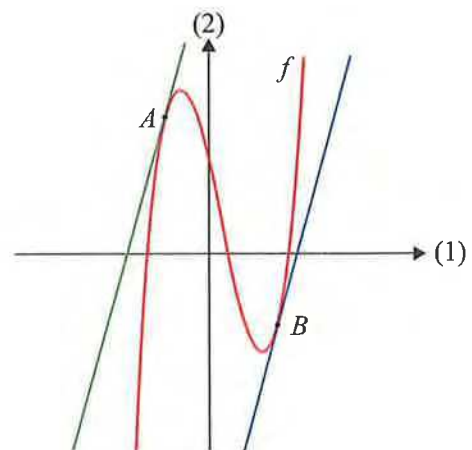
- Opgave 13** En funktion er givet ved

$$f(x) = x^3 - 2x^2 - 11x + 12.$$

- a) Løs $f(x) = 0$.

Grafen for f har to forskellige tangenter med hældningskoefficienten 9. De to tangenters røringspunkter med grafen for f benævnes A og B (se figuren).

- b) Bestem førstekoordinaten til hvert af punkterne A og B .





**UNDERVISNINGS
MINISTERIET**
KVALITETS- OG
TILSYNSSTYRELSEN

gl.

Matematik A

Studentereksamen

Opgavesættet er delt i to dele.

Delpøven uden hjælpemidler består af opgave 1-6 med i alt 6 spørgsmål.
Delpøven med hjælpemidler består af opgave 7-15 med i alt 19 spørgsmål.

De 25 spørgsmål indgår med lige vægt i bedømmelsen.

Bedømmelsen af det skriftlige eksamenssæt

I bedømmelsen af besvarelsen af de enkelte spørgsmål og i helhedsindtrykket vil der blive lagt vægt på, om eksaminandens tankegang fremgår klart af besvarelsen. Dette vurderes blandt andet ud fra kravene beskrevet i de følgende fem kategorier:

1. TEKST

Besvarelsen skal indeholde en forbindende tekst fra start til slut, der giver en klar præsentation af, hvad den enkelte opgave og de enkelte delspørgsmål går ud på.

2. NOTATION OG LAYOUT

Der kræves en hensigtsmæssig opstilling af besvarelsen i overensstemmelse med god matematisk skik, herunder en redegørelse for den matematiske notation, der indføres og anvendes, og som ikke kan henføres til standardviden.

3. REDEGØRELSE OG DOKUMENTATION

Besvarelsen skal indeholde en redegørelse for den anvendte fremgangsmåde og dokumentation i form af et passende antal mellemregninger og/eller en matematisk forklaring på brugen af de forskellige faciliteter, som et værktøjsprogram tilbyder.

4. FIGURER

I besvarelsen skal der indgå en hensigtsmæssig brug af figurer og illustrationer, og der skal være en tydelig sammenhæng mellem tekst og figurer.

5. KONKLUSION

Besvarelsen skal indeholde en afrunding af de forskellige spørgsmål med præcise konklusioner, præsenteret i et klart sprog og/eller med brug af almindelig matematisk notation.

Delprøven uden hjælpemidler

Kl. 09.00 – 10.00

Opgave 1 Løs andengradsligningen $x^2 + 2x - 15 = 0$.

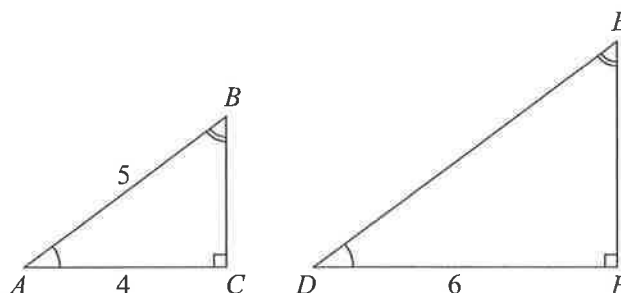
Opgave 2 I en iskiosk har man fundet følgende sammenhæng mellem antallet af is, der kan sælges om dagen, og den pris isen sælges for

$$f(x) = -2,5x + 125,$$

hvor $f(x)$ er antallet af solgte is, og x er prisen for en is målt i kr.

Gør rede for, hvad tallet $-2,5$ betyder for sammenhængen mellem antallet af solgte is og prisen for en is, og bestem den pris, der betyder, at der ikke sælges nogen is.

Opgave 3



På figuren ses to ensvinklede og retvinklede trekanter ABC og DEF . Nogle af trekanternes sidelængder er angivet på figuren.

Bestem $|BC|$ og $|DE|$.

Opgave 4 I et koordinatsystem i planen er en cirkel bestemt ved ligningen

$$x^2 - 4x + y^2 + 6y - 3 = 0.$$

Bestem cirkelens radius og koordinatsættet til dens centrum.

Opgave 5 En funktion f er bestemt ved

$$f(x) = x \cdot e^x .$$

Undersøg, om f er løsning til differentialligningen

$$\frac{dy}{dx} = y + e^x .$$

Opgave 6 Bestem integralet $\int_2^3 \frac{3x^2}{x^3 - 7} dx$.

Besvarelsen afleveres kl. 10.00
--

Delprøven med hjælpemidler

Kl. 09.00 – 14.00

Opgave 7 I et koordinatsystem i planen er to vektorer $\vec{a}$ og $\vec{b}$ givet ved

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix} \text{ og } \vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

- a) Bestem vinklen mellem de to vektorer $\vec{a}$ og $\vec{b}$.
- b) Bestem koordinatsættet til projektionen af $\vec{a}$ på $\vec{b}$.

Opgave 8 Tabellen viser sammenhørende værdier af højden over havoverfladen og diameteren for en kugleformet gasmængde i en vejrballon, der sendes op gennem atmosfæren.

Højde (km)	0,5	1,0	1,5	2,0	2,5	3,0	3,5
Diameter (m)	20,5	21,0	21,4	22,0	22,3	23,0	23,5

I en model kan sammenhængen mellem højde og diameter beskrives ved

$$d = b \cdot a^h,$$

hvor d er diameteren (målt i m) af den kugleformede gasmængde, og h er vejrballonens højde (målt i km) over havoverfladen.

- a) Benyt tabellens data til at bestemme tallene a og b .
- b) Benyt modellen til at forudsige diameteren af den kugleformede gasmængde, når vejrballonens højde er i 6 km's højde.
- c) Giv en fortolkning af tallet a , og benyt modellen til at bestemme, hvor meget vejrballonens højde skal øges med, for at diameteren vokser med 50%.

Opgave 9 En funktion f er givet ved

$$f(x) = \ln(x) - 2x + 5, \quad x > 0.$$

- a) Bestem en ligning for tangenten til grafen for f i punktet $P(2, f(2))$.
- b) Bestem monotoniforholdene for f .

Opgave 10 En kugle i et koordinatsystem i rummet har centrum i $C(1, 2, -1)$, og punktet $P(1, 0, 5)$ ligger på kuglen.

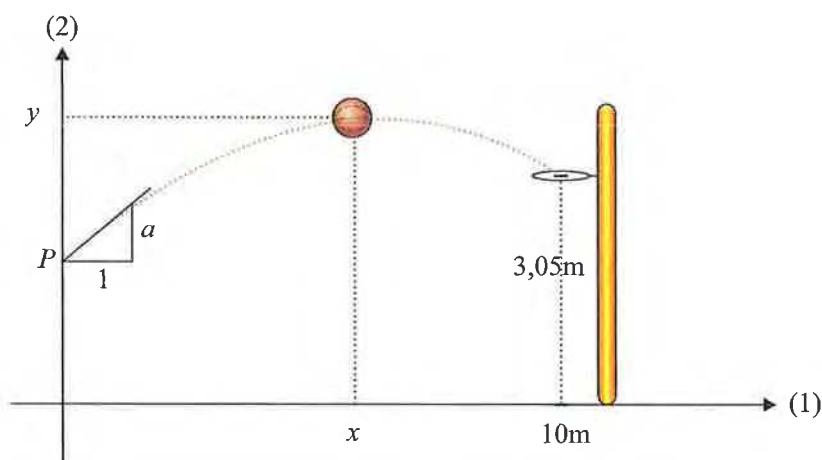
a) Opskriv en ligning for kuglen.

Planen α er bestemt ved ligningen

$$\alpha: y + 6z - 40 = 0.$$

b) Undersøg, om α er en tangentplan til kuglen.

Opgave 11



I en model for et kast med en basketball, beskriver bolden en bane, der er en del af en parabel, som har ligningen

$$y = -0,034 \cdot (1 + a^2) \cdot x^2 + a \cdot x + 2,1,$$

hvor y er boldens højde (målt i m) over gulvet, og x er boldens vandrette afstand (målt i m) fra spilleren. Desuden er a hældningskoefficienten for parablens tangent i punktet P , der hvor bolden forlader spillerens hånd (se figuren).

a) Tegn parablen for $0 \leq x \leq 10$, når $a = 1,1$.

b) Bestem de værdier af a , for hvilke bolden går midt gennem kurven, der er placeret i 3,05 meters højde 10 meter fra spilleren.

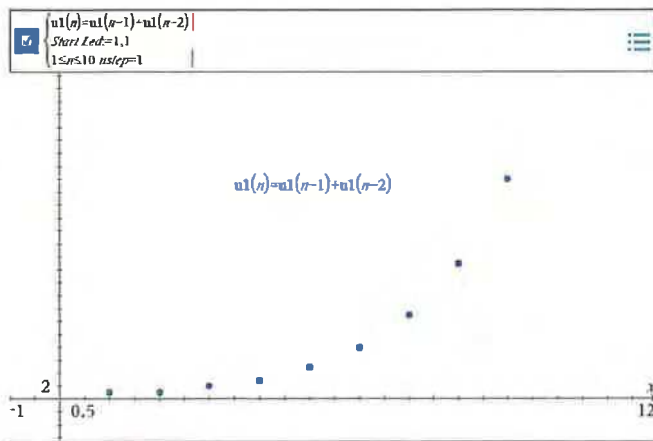
Opgave 12 Tabellen viser, hvordan den samlede disponible indkomst var fordelt på alder i Danmark i 2012.

Alder(år)	15-24	25-34	35-44	45-54	55-64	65-74	75-84
Procentdel	4,9%	12,7%	20,8%	23,1%	18,6%	12,3%	7,6%

a) Tegn sumkurven for fordelingen, og bestem kvartilsættet.

b) Bestem den procentdel af den samlede disponible indkomst, som de 30-40 årige tjener.

Kilde: www.dst.dk



Taylorpolynomier i Nspire

Det er muligt at få bestemt Taylorpolynomiet af en given grad ved hjælp af Nspire.

Funktionen $f(x) = e^x$ samt udviklingspunktet $x_0 = 0$ og graden 3 er givet.

Kommandoen:

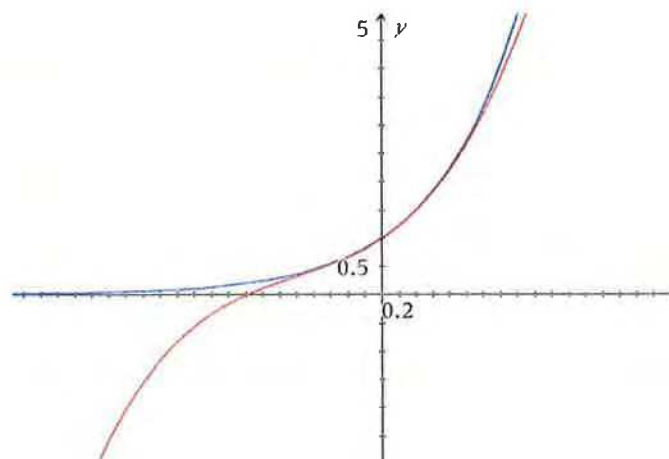
`Taylor(f(x),x,3,0)`

giver

$f(x) := e^x$ • Udført

$\text{taylor}(f(x),x,3,0) \rightarrow 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6}$

Og plottene ser ud som følger:



Bilag 3: Teknisk hjælp Geogebra 5

Følger i Geogebra 5

Det er muligt at definere en følge i Geogebra 5 med en kommando.

Eksempelvis vil kommandoen til følgen af de ti første kvadrattal kunne defineres som

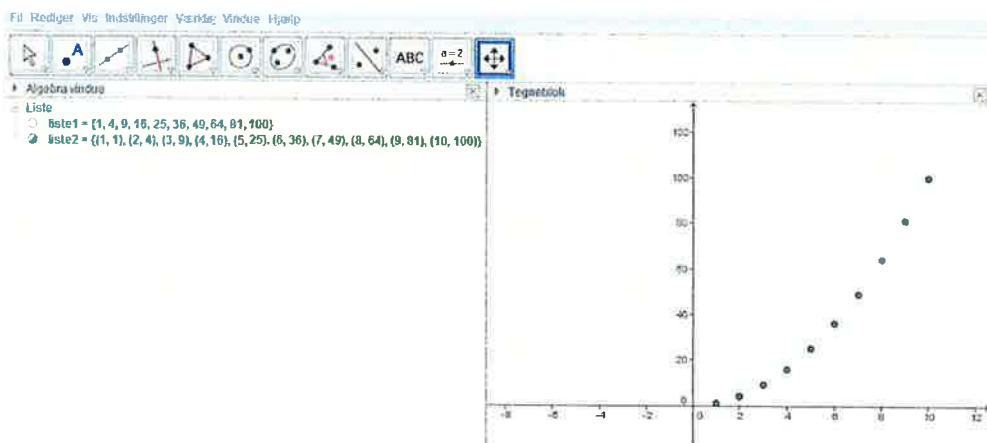
`Sekvens[i^2,i,1,10]`

Outputtet i Geogebra 5 bliver da



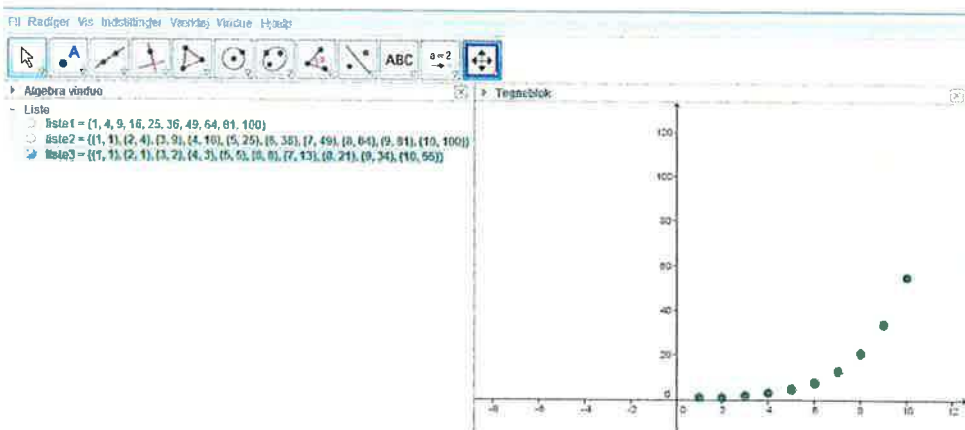
Et plot af talfølgen kan fås ved at lave listen:

`Sekvens[(i,i^2),i,1,10]`



Fibonnacifølgen kan ikke defineres rekursivt i Geogebra 5.

Derfor vil et plot kræve, at man udregner elementerne manuelt og derefter opstiller en liste med punkterne



Taylorpolynomier i Geogebra 5

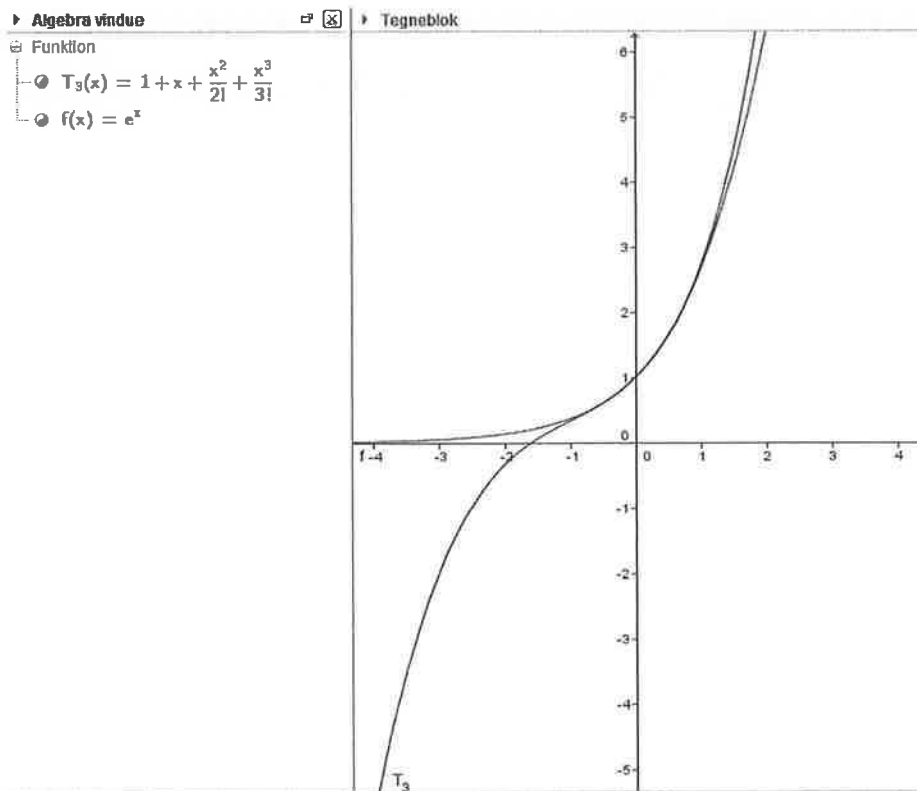
Det er muligt at få bestemt Taylorpolynomiet af en given grad ved hjælp af Geogebra 5.

Funktionen $f(x)=e^x$ samt udviklingspunktet $x_0=0$ og graden 3 er givet.

Kommandoen

Taylorpolynomium[f(x),0,3]

giver

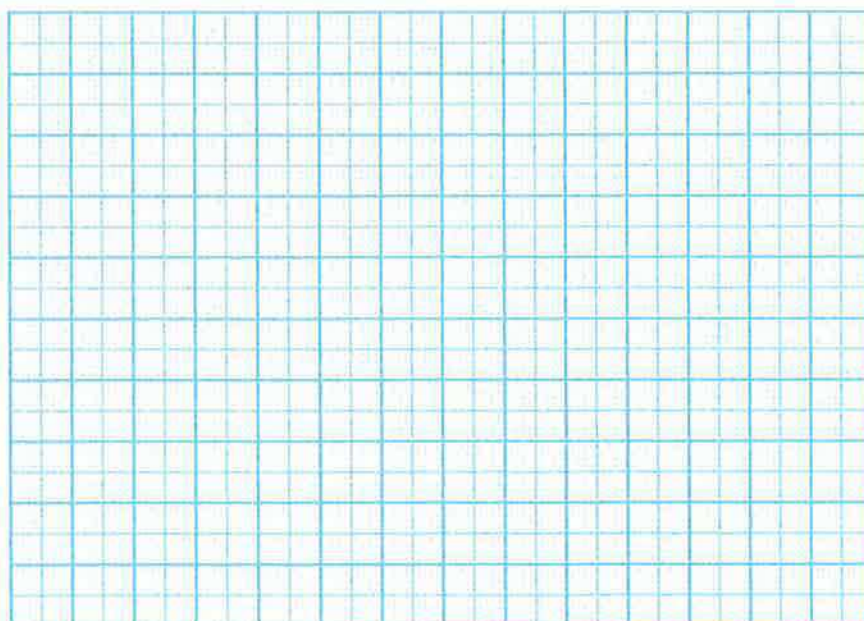
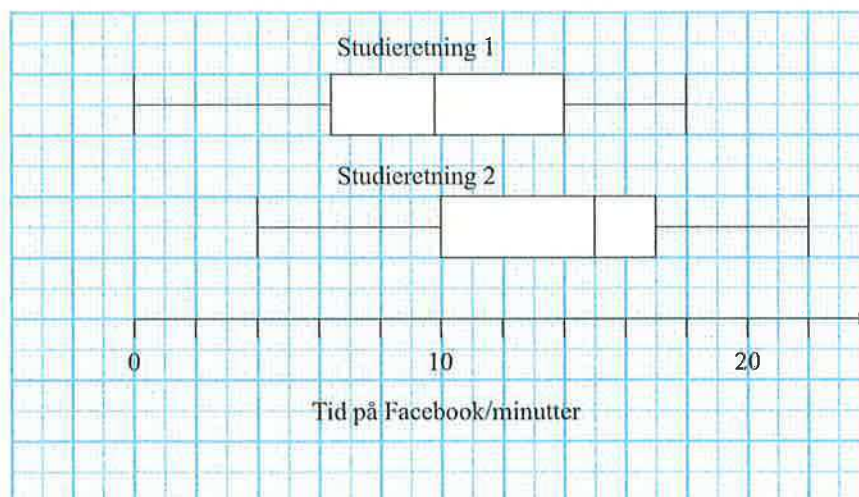


BILAG

Bilaget kan indgå i besvarelsen.

Skole	Hold	ID
Navn	Ark nr	Antal ark i alt
		Tilsynsførende

4





**UNDERVISNINGS
MINISTERIET**
KVALITETS- OG
TILSYNSSTYRELSEN

Matematik A

Studentereksamen

Digital eksamensopgave med adgang til internettet

Fredag den 22. maj 2015
kl. 09.00-14.00

Opgavesættet er delt i to dele.

Delprøve 1: 2 timer med autoriseret formelsamling

Delprøve 2: 3 timer med alle hjælpemidler

Delprøve 1 består af 12 spørgsmål

Delprøve 2 består af 13 spørgsmål

Alle spørgsmål tillægges hver 10 point

Bedømmelsen af det skriftlige eksamenssæt

I bedømmelsen af besvarelsen af de enkelte spørgsmål og i helhedsindtrykket vil der blive lagt vægt på, om eksaminandens tankegang fremgår klart af besvarelsen. Dette vurderes blandt andet ud fra kravene beskrevet i de følgende fem kategorier:

1. TEKST

Besvarelsen skal indeholde en forbindende tekst fra start til slut, der giver en klar præsentation af, hvad den enkelte opgave og de enkelte delspørgsmål går ud på.

2. NOTATION OG LAYOUT

Der kræves en hensigtsmæssig opstilling af besvarelsen i overensstemmelse med god matematisk skik, herunder en redegørelse for den matematiske notation, der indføres og anvendes, og som ikke kan henføres til standardviden.

3. REDEGØRELSE OG DOKUMENTATION

Besvarelsen skal indeholde en redegørelse for den anvendte fremgangsmåde og dokumentation i form af et passende antal mellemregninger og/eller en matematisk forklaring på brugen af de forskellige faciliteter, som et værktøjsprogram tilbyder.

4. FIGURER

I besvarelsen skal der indgå en hensigtsmæssig brug af figurer og illustrationer, og der skal være en tydelig sammenhæng mellem tekst og figurer.

5. KONKLUSION

Besvarelsen skal indeholde en afrunding af de forskellige spørgsmål med præcise konklusioner, præsenteret i et klart sprog og/eller med brug af almindelig matematisk notation.

Delprøven uden hjælpemidler

Kl. 09.00 – 11.00

Opgave 1 To rette linjer l og m i planen er bestemt ved ligningerne

$$l: y = 4x - 5$$

$$m: -2x + y = 1$$

- a) Bestem koordinatsættet til skæringspunktet mellem l og m .

Opgave 2 I et koordinatsystem er to vektorer givet ved

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 5 \\ 15 \end{pmatrix} \quad \text{og} \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \end{pmatrix}.$$

- a) Bestem arealet af parallelogrammet udspændt af $\vec{a}$ og $\vec{b}$.

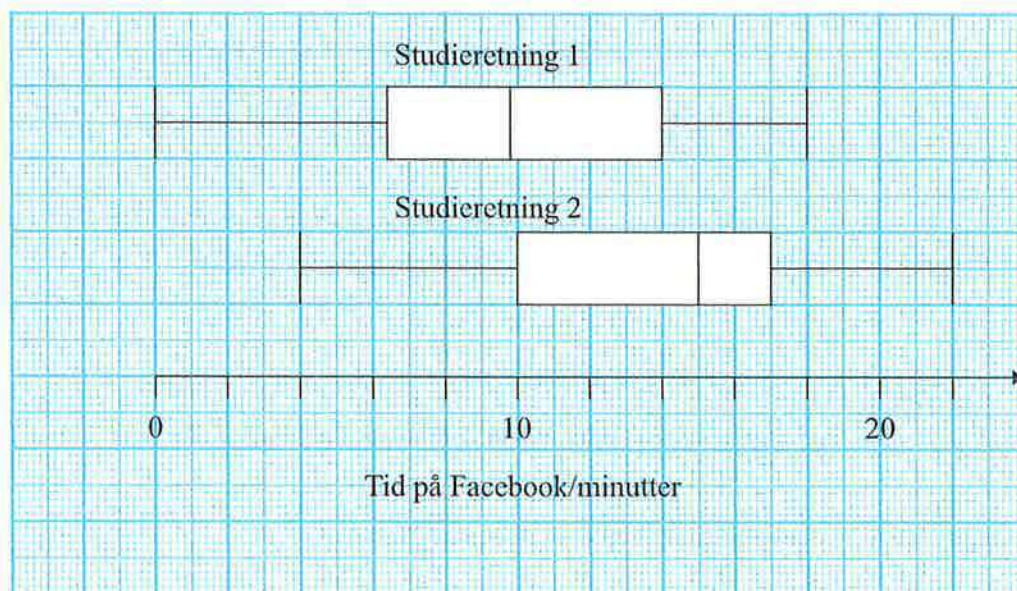
Opgave 3 I en population af bakterier kan udviklingen i antallet af bakterier beskrives ved modellen

$$N(t) = 120 \cdot 1,043^t,$$

hvor $N(t)$ betegner antallet af bakterier (målt i mio.) til tidspunktet t (målt i døgn).

- a) Gør rede for, hvad konstanterne i modellen fortæller om udviklingen i antallet af bakterier.

- Opgave 4** Blandt eleverne på to forskellige studieretninger på et gymnasium har man opgjort fordelingen af den tid, den enkelte elev i gennemsnit bruger på Facebook pr. undervisningstime. Resultatet fremgår af nedenstående boksplot.



Til opgaven hører et bilag

- Sammenlign brugen af Facebook blandt eleverne fra de to studieretninger ved at inddrage kvartilsættene.
- Tegn en mulig sumkurve for fordelingen af elevernes brug af Facebook i studieretning 1.

- Opgave 5** En funktion f er bestemt ved

$$f(x) = \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 - 6x + 10.$$

- Bestem monotoniforholdene for f .

- Opgave 6** En funktion f er bestemt ved

$$f(x) = 3x^2 - 6x + 5.$$

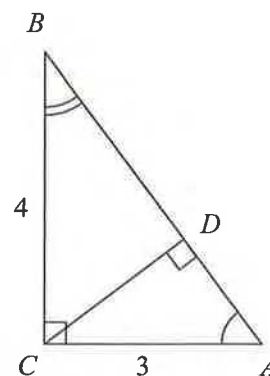
Grafen for f er en parabel.

- Bestem koordinatsættet til parablens toppunkt.
- Bestem en ligning for tangenten til grafen for f i punktet $P(2, f(2))$, og tegn en skitse af grafen for f .

Opgave 7

På figuren ses en retvinklet trekant ABC . Fodpunktet for højden på siden AB benævnes D .

- a) Bestem $|AB|$, $|CD|$ og $|AD|$.



Opgave 8

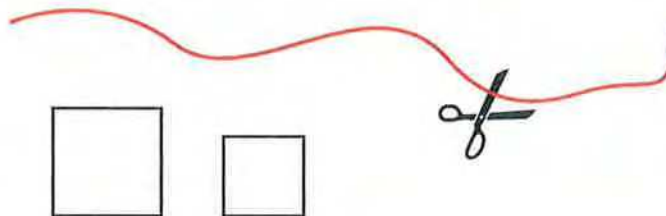
En funktion f er bestemt ved

$$f(x) = x \cdot \ln(x) + 3x.$$

- a) Undersøg, om f er en løsning til differentialligningen

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x} + 1.$$

Opgave 9



En snor på 12 cm klippes i to stykker, og stykkerne bruges til at danne omkredsen af to kvadrater.

- a) Bestem det samlede areal af de to kvadrater, når længden af det ene stykke snor er 4 cm.

Snoren klippes nu over $4x$ cm fra den ene ende, hvor $0 < x < 3$.

- b) Vis, at det samlede areal A af de to kvadrater som funktion af x er givet ved

$$A(x) = 2x^2 - 6x + 9.$$

Besvarelsen afleveres kl. 11.00

Delprøven med hjælpemidler

Kl. 09.00 – 14.00

Opgave 10



Grafik: Colour box.com

I forbindelse med oppustning af en bestemt type ballon til en fødselsdag har man målt sammenhørende værdier af tiden og bredden af en ballon af denne type under oppustningen.

Tid (sekunder)	1	2	3	4	5
Bredde (cm)	13,5	17,9	20,3	23,3	25,2

I en model kan sammenhængen beskrives ved

$$w = b \cdot t^a,$$

hvor w betegner ballonens bredde (målt i cm) til tidspunktet t (målt i sekunder efter starten af oppustningen).

- Benyt tabellens data til at bestemme konstanterne a og b , og benyt modellen til at bestemme hvor lang tid det tager at puste en ballon op til en bredde på 30 cm.
- Benyt modellen til at bestemme hvor mange procent bredden af en ballon af denne type ændrer sig med, når oppustningstiden øges med 15%.

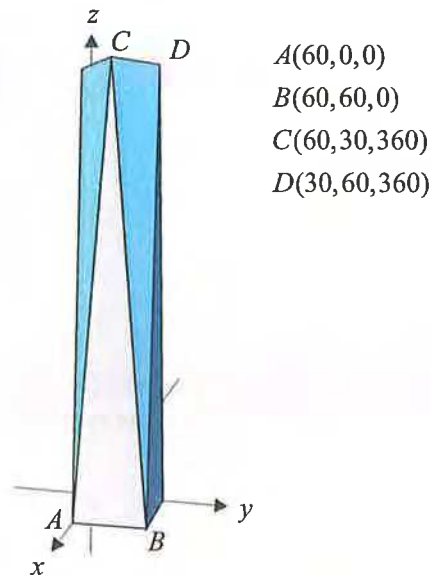
Opgave 11

En funktion f er givet ved

$$f(x) = e^{-x} \cdot \sin(x).$$

- Bestem Taylorpolynomiet T af grad 4 med udviklingspunkt i $x_0 = 0$ for funktionen f , og tegn graferne for T og f i samme koordinatsystem.
- Bestem en forskrift for restleddet hørende til Taylorpolynomiet T , og bestem størrelsen af restleddet for $x = 0,8$.

Opgave 12



På figuren ses en model af en del af *Freedom Tower* i NYC indtegnet i et koordinatsystem i rummet med enheden meter på alle akser. Bygningen består af otte trekantede glasflader. Koordinatsættet til nogle af bygningens hjørner er opgivet på figuren.

- a) Bestem en ligning for den plan, der indeholder glasfladen ABC , og bestem arealet af denne glasflade.

Det oplyses, at glasfladen BCD ligger i planen β givet ved ligningen

$$\beta: 12x + 12y + z = 1440.$$

- b) Bestem den stumpe vinkel mellem glasfladerne ABC og BCD .

Opgave 13



Foto: colourbox.com

En bolsjeproducent fylder på tilfældig måde bolsjer, der hver kan have en af seks farver, i poser. Ifølge producenten produceres der lige mange bolsjer med hver af de seks farver. En søskendeflok deler en pose af producentens bolsjer. De har talt antallet af bolsjer med de forskellige farver i posen.

Farve	Gul	Hvid	Pink	Rød	Blå	Grøn
Antal	50	29	47	49	32	39

- a) Opstil en nulhypotese, bestem teststørrelsen, og afgør om nulhypotesen kan forkastes på et 5% signifikansniveau.

Opgave 14



www.grillguru.dk

En pattegris skal helsteges på et bål. I en model kan temperaturen i grisens indre beskrives ved en funktion, der er løsning til differentialligningen

$$\frac{dy}{dt} = a \cdot (100 - y),$$

hvor y benævner temperaturen i grisens indre (målt i $^{\circ}\text{C}$) til tidspunktet t (målt i timer efter starten på stegningen). Det oplyses, at temperaturen i grisens indre er 10°C , når stegningen starter. Endvidere oplyses det, at temperaturen i grisens indre er 57°C efter 5 timers stegning.

- a) Bestem en forskrift for y , og tegn grafen for y .

Grisen er færdigstegt, når temperaturen i dens indre er 70°C .

- b) Benyt modellen til at bestemme, hvor lang tid grisen skal steges for være færdigstegt, og bestem væksthastigheden for temperaturen i grisens indre på dette tidspunkt.

Opgave 15

Et land ønsker at skabe vækst ved at give skattelettelser. I det pågældende land er skattekvoten $t = 0,30$, opsparingskvoten $s = 0,15$ og importkvoten $p = 0,20$.

- a) Bestem multiplikatoreffekten M .
- b) Bestem det mindste antal gennemløb k , så M_k overstiger 1,2.

Opgave 16 En funktion f er givet ved

$$f(x) = \sqrt{-x^2 + 52x + 36}, \quad 0 \leq x \leq 44.$$

I en model danner grafen for f en kurve, der har samme form som hver af de 47 lameller, der udgør lampen på billedet nedenfor. Alle mål er i cm.



- a) Tegn grafen for f , og bestem lampens radius på det bredeste sted.

Det oplyses, at buelængden af grafen for en differentiabel funktion f i et interval $[a; b]$ kan bestemmes ved

$$l = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx.$$

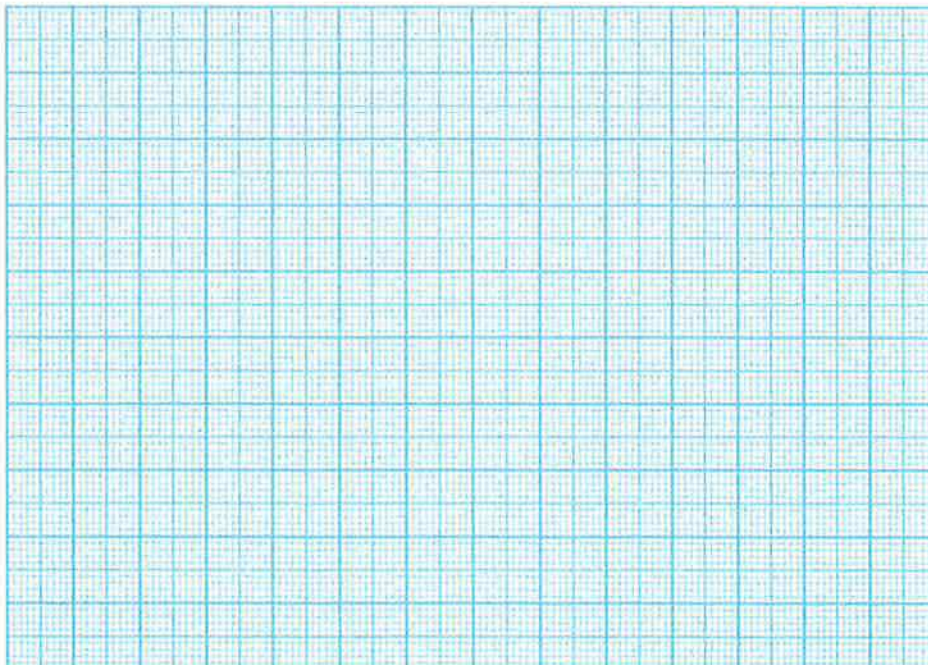
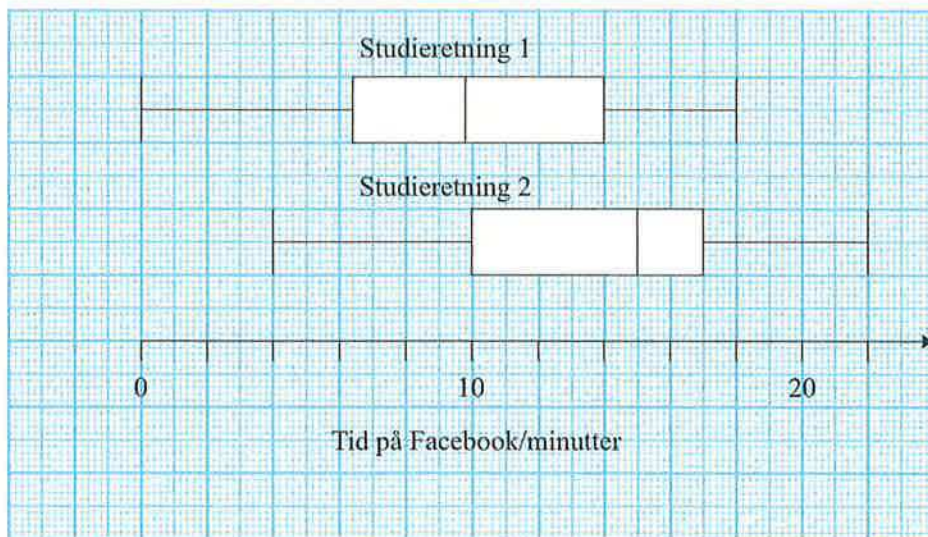
- b) Bestem længden af én af de 47 lameller.

BILAG

Bilaget kan indgå i besvarelsen.

Skole	Hold		ID
Navn	Ark nr	Antal ark i alt	Tilsynsførende

4





**UNDERVISNINGS
MINISTERIET**
KVALITETS- OG
TILSYNSSTYRELSEN

Matematik A

Studentereksamen

Fredag den 22. maj 2015
kl. 9.00 - 14.00

Opgavesættet er delt i to dele.

Delprøven uden hjælpemidler består af opgave 1-6 med i alt 6 spørgsmål.
Delprøven med hjælpemidler består af opgave 7-15 med i alt 19 spørgsmål.

De 25 spørgsmål indgår med lige vægt i bedømmelsen.

Bedømmelsen af det skriftlige eksamenssæt

I bedømmelsen af besvarelsen af de enkelte spørgsmål og i helhedsindtrykket vil der blive lagt vægt på, om eksaminandens tankegang fremgår klart af besvarelsen. Dette vurderes blandt andet ud fra kravene beskrevet i de følgende fem kategorier:

1. TEKST

Besvarelsen skal indeholde en forbindende tekst fra start til slut, der giver en klar præsentation af, hvad den enkelte opgave og de enkelte delspørgsmål går ud på.

2. NOTATION OG LAYOUT

Der kræves en hensigtsmæssig opstilling af besvarelsen i overensstemmelse med god matematisk skik, herunder en redegørelse for den matematiske notation, der indføres og anvendes, og som ikke kan henføres til standardviden.

3. REDEGØRELSE OG DOKUMENTATION

Besvarelsen skal indeholde en redegørelse for den anvendte fremgangsmåde og dokumentation i form af et passende antal mellemregninger og/eller en matematisk forklaring på brugen af de forskellige faciliteter, som et værktøjsprogram tilbyder.

4. FIGURER

I besvarelsen skal der indgå en hensigtsmæssig brug af figurer og illustrationer, og der skal være en tydelig sammenhæng mellem tekst og figurer.

5. KONKLUSION

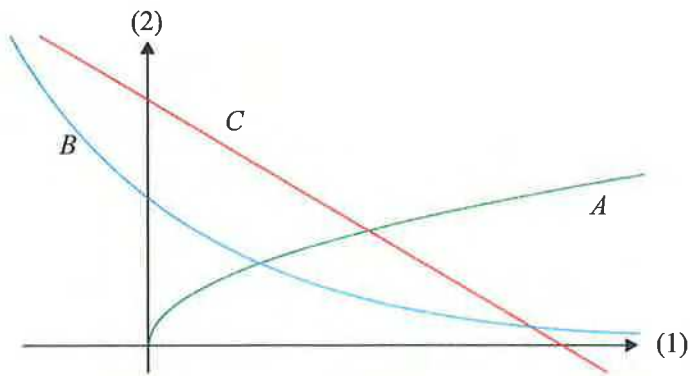
Besvarelsen skal indeholde en afrunding af de forskellige spørgsmål med præcise konklusioner, præsenteret i et klart sprog og/eller med brug af almindelig matematisk notation.

Delprøven uden hjælpemidler

Kl. 09.00 – 10.00

- Opgave 1** I et bestemt land var der 190 pengeinstitutter i 2001. Efterfølgende er der hvert år blevet lukket 8 pengeinstitutter.
- Indfør passende variable, og opstil en model for udviklingen i antallet af pengeinstitutter i landet efter 2001.

- Opgave 2** Figuren viser graferne A , B og C for henholdsvis en lineær funktion f , en potensfunktion g og en eksponentialfunktion h .



Gør for hver af graferne A , B og C rede for, hvilken af de tre funktioner den er graf for.

- Opgave 3** Undersøg, om $x = 3$ er en løsning til ligningen $x^3 - 9 \cdot x^2 + 23 \cdot x - 15 = 0$.

- Opgave 4** En funktion f er givet ved forskriften

$$f(x) = 5e^x + 4.$$

Bestem en ligning for tangenten til grafen for f i punktet $P(0, f(0))$.

Opgave 5 En funktion f er givet ved

$$f(x) = \frac{5}{x} + 2x, \quad x > 0.$$

Redegør for, hvilken af de tre funktioner

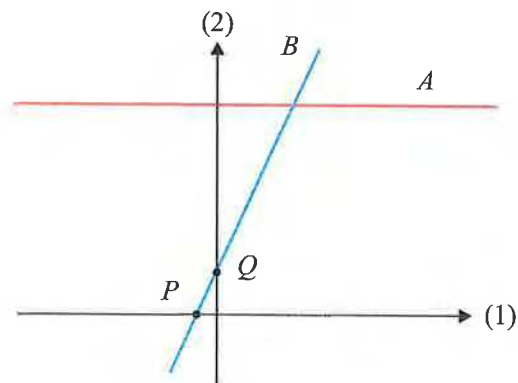
$$g(x) = \frac{-5}{x^2} + 2$$

$$h(x) = 5 \ln(x) + x^2$$

$$k(x) = \ln(5x) + x^2$$

der er en stamfunktion til f .

Opgave 6 Figuren viser graferne for de afledede funktioner af funktionerne f og g .



A er grafen for den afledede funktion f' , som har forskriften $f'(x) = 5$. B er grafen for den afledede funktion g' , som er en lineær funktion.

Grafen for g' går igennem punkterne $P(-\frac{1}{2}, 0)$ og $Q(0, 1)$.

Bestem monotoniforholdene for funktionen g , og bestem førstekoordinaten til det punkt R , hvor tangenthældningen til grafen for f er den samme som tangenthældningen til grafen for g .

Besvarelsen afleveres kl. 10.00

Delprøven med hjælpemidler

Kl. 09.00 – 14.00

Opgave 7 I et koordinatsystem i planen er der givet et punkt $P(5,4)$ og en linje l med ligningen

$$x - y + 2 = 0.$$

a) Bestem afstanden fra punktet P til linjen l .

En anden linje m er givet ved parameterfremstillingen

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

b) Bestem skæringspunktet mellem linjerne l og m .

Opgave 8



Grafik: Colourbox

Tabellen viser omsætningen af biografbilletter i Kina i perioden 2006 - 2011.

Årstal	2006	2007	2008	2009	2010	2011
Omsætning af biografbilletter (mio. USD)	329	434	607	909	1502	2030

I en model for udviklingen i omsætningen af biografbilletter i Kina gælder følgende

$$f(x) = b \cdot a^x,$$

hvor $f(x)$ betegner omsætningen af biografbilletter (målt i mio. USD) til tidspunktet x (målt i år efter 2006).

- Benyt tabellen til at bestemme konstanterne a og b .
- Benyt modellen til at bestemme det år, hvor omsætningen af biografbilletter er 10000 mio. USD.
- Benyt modellen til at bestemme den årlige gennemsnitlige vækstrate samt fordoblingstiden for omsætningen af biografbilletter.

Kilde: "Emerging markets and the digitalization of the film industry", UIS INFORMATION PAPER NO. 14, August 2013.

Opgave 9 Grafen for en funktion f på formen $f(x) = b \cdot x^a$ går igennem punkterne $A(3,100)$ og $B(15,50)$.

- a) Bestem en forskrift for f .
- b) Bestem $f(20)$, og bestem den procentvise ændring i $f(x)$, når x vokser med 70%.

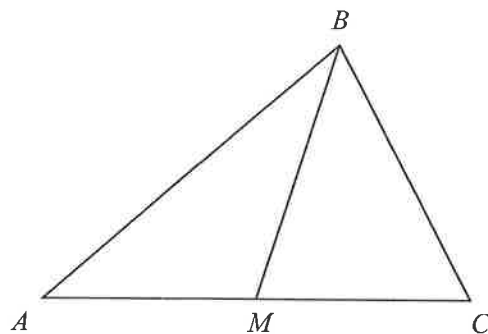
Opgave 10 Et polynomium f er givet ved forskriften

$$f(x) = x^6 - 5x^3 + 4.$$

Det oplyses, at grafen for f har netop to skæringspunkter med førsteaksen.

- a) Bestem koordinatsættet til hvert af disse skæringspunkter.
- b) Bestem monotoniforholdene for f .

Opgave 11 I en trekant ABC er $|AB| = 13$. Midtpunktet af siden AC benævnes M , og det oplyses, at $|AM| = 7$ og $|BM| = 9$.



- a) Bestem vinkel A , og bestem omkredsen af trekant ABC .
- b) Bestem længden af højden fra B .

Opgave 12 I forbindelse med en forbrugerundersøgelse i en bestemt population vil man undersøge, om en tilfældig stikprøve på 300 forbrugere er repræsentativ med hensyn til alder. Nulhypotesen er derfor:

Aldersfordelingen i stikprøven følger aldersfordelingen i populationen.

I stikprøven er aldersfordelingen som vist i nedenstående tabel.

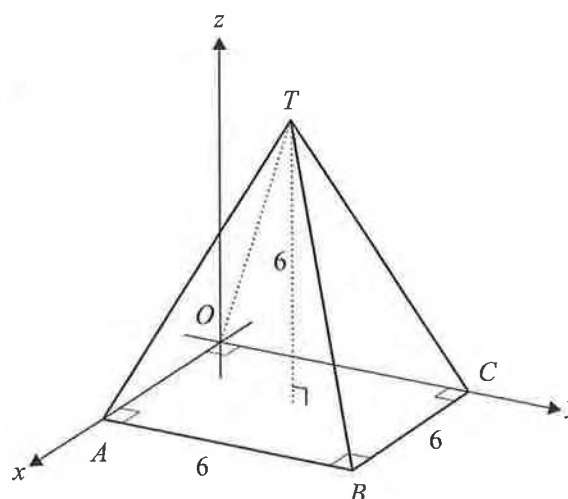
Alder	20-29	30-39	40-49	50-59	60-69	70-79	80-
Antal	39	42	83	54	49	21	12

Aldersfordelingen i populationen er vist i nedenstående tabel.

Alder	20-29	30-39	40-49	50-59	60-69	70-79	80-
Antal i %	15	16	19	17	17	10	6

- Afgør, om nulhypotesen kan forkastes på et 5% signifikansniveau.
- Angiv teststørrelsen, og redegør for, hvilken af aldersgrupperne der giver det største bidrag til teststørrelsen.

Opgave 13



Billedet ovenfor viser en flødebolle, der har form som en pyramide med kvadratisk bund. Toppunktet af pyramiden ligger på en linje, der står vinkelret på diagonalernes skæringspunkt i bunden. Den kvadratiske bund har sidelængden 6 cm, og afstanden fra toppunktet til bunden er 6 cm.

På figuren er en model af flødebollen indtegnet i et koordinatsystem med enheden 1 cm.

- Benyt modellen til at bestemme den vinkel, som en af flødebollens sider danner med flødebollens bund.
- Benyt modellen til at bestemme det samlede overfladeareal af flødebollen inklusiv bunden.

Opgave 14 To funktioner f og g er givet ved forskrifterne

$$\begin{aligned}f(x) &= a^x \\ g(x) &= x + 1,\end{aligned}$$

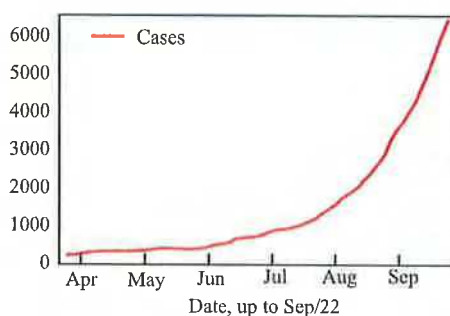
hvor $1 < a < 2$.

Graferne for f og g afgrænser i første kvadrant sammen med linjen med ligningen $x = 1$ en punktmængde M , der har et areal.

- Bestem arealet af M , når $a = 1,5$.
- Bestem a , så arealet af M er $0,4$.

Opgave 15 Man har i perioden april til september 2014 opgjort antallet af personer, der er smittet med en bestemt virus i Vestafrika.

Figuren viser udviklingen i antallet af smittede efter første opgørelse.



For at beskrive udviklingen i antallet af smittede har man lavet to modeller.

I den første model antages det, at hastigheden, hvormed antallet af smittede vokser, er proportional med antallet af smittede.

I modellen måles tiden t i døgn (efter første opgørelse), proportionalitetskonstanten er $0,022$, og der er 3800 smittede til tidspunktet $t = 162$.

- Benyt den første model til at opstille en differentialligning, der beskriver udviklingen i antallet af smittede, og bestem hastigheden, hvormed antallet af smittede vokser til tidspunktet $t = 162$.

I den anden model antages det, at udviklingen i antallet af smittede som funktion af tiden opfylder differentialligningen

$$\frac{dN}{dt} = 3 \cdot 10^{-6} \cdot N \cdot (13382 - N),$$

hvor N betegner antallet af smittede til tidspunktet t målt i døgn (efter første opgørelse).

- Benyt den anden model til at bestemme hastigheden, hvormed antallet af smittede vokser til tidspunktet $t = 162$, og sammenlign udviklingen i hastigheden, hvormed antallet af smittede vokser i de to modeller til tidspunktet $t = 162$.



**UNDERVISNINGS
MINISTERIET**
KVALITETS- OG
TILSYNSSTYRELSEN

Matematik B

Studentereksamen

Opgavesættet er delt i to dele.

Delprøven uden hjælpemidler består af opgave 1-6 med i alt 6 spørgsmål.
Delprøven med hjælpemidler består af opgave 7-13 med i alt 14 spørgsmål.

De 20 spørgsmål indgår med lige vægt i bedømmelsen.

Bedømmelsen af det skriftlige eksamenssæt

I bedømmelsen af besvarelsen af de enkelte spørgsmål og i helhedsindtrykket vil der blive lagt vægt på, om eksaminandens tankegang fremgår klart af besvarelsen. Dette vurderes blandt andet ud fra kravene beskrevet i de følgende fem kategorier:

1. TEKST

Besvarelsen skal indeholde en forbindende tekst fra start til slut, der giver en klar præsentation af, hvad den enkelte opgave og de enkelte delspørgsmål går ud på.

2. NOTATION OG LAYOUT

Der kræves en hensigtsmæssig opstilling af besvarelsen i overensstemmelse med god matematisk skik, herunder en redegørelse for den matematiske notation, der indføres og anvendes, og som ikke kan henføres til standardviden.

3. REDEGØRELSE OG DOKUMENTATION

Besvarelsen skal indeholde en redegørelse for den anvendte fremgangsmåde og dokumentation i form af et passende antal mellemregninger og/eller en matematisk forklaring på brugen af de forskellige faciliteter, som et værktøjsprogram tilbyder.

4. FIGURER

I besvarelsen skal der indgå en hensigtsmæssig brug af figurer og illustrationer, og der skal være en tydelig sammenhæng mellem tekst og figurer.

5. KONKLUSION

Besvarelsen skal indeholde en afrunding af de forskellige spørgsmål med præcise konklusioner, præsenteret i et klart sprog og/eller med brug af almindelig matematisk notation.

Delprøven uden hjælpemidler

Kl. 09.00 – 10.00

Opgave 1 Løs ligningen $4x - 7 = 81$.

Opgave 2 I en model for udviklingen i vægten for en person på slankekur kan sammenhængen mellem personens vægt og antallet af uger siden starten af slankekuren beskrives ved

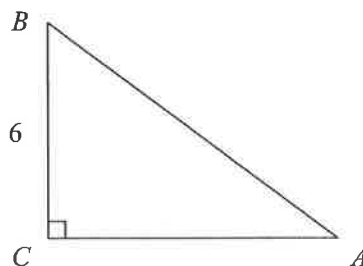
$$y = 87 - 0,45 \cdot x,$$

hvor y er personens vægt (målt i kg) til tidspunktet x (målt i uger efter starten af slankekuren).

Beskriv betydningen af konstanterne 87 og $-0,45$.

Opgave 3 Løs ligningen $x^2 + 3x - 10 = 0$.

Opgave 4



Om en retvinklet trekant ABC oplyses, at $|BC| = 6$ samt at arealet er 24.

Bestem $|AC|$ og $|AB|$.

Opgave 5 En parabel er graf for en funktion af typen $f(x) = ax^2 + bx + c$. Diskriminanten benævnes d . Det oplyses, at a og d er positive, samt at c er negativ.

Skitsér en mulig graf for f , og argumentér for grafens udseende.

Opgave 6 En funktion f er bestemt ved $f(x) = 4x^3 - 9x^2 + 1$.

Bestem en forskrift for den stamfunktion til f , hvis graf går gennem punktet $P(1,12)$.

Besvarelsen afleveres kl. 10.00
--

Delprøven med hjælpemidler

Kl. 09.00 – 13.00

- Opgave 7** Pr. 1. januar 2013 har man opgjort aldersfordelingen af københavnere mellem 30 og 70 år, der har taget en lang videregående uddannelse. Aldersfordelingen fremgår af nedenstående tabel.

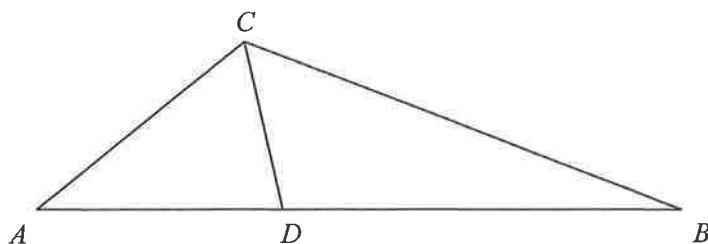
Alder (år)	30 – 40	40 – 50	50 – 60	60 – 70
Københavnere med en lang videregående uddannelse	28738	13128	6608	5169

- Bestem de kumulerede frekvenser, og tegn en sumkurve for aldersfordelingen.
- Bestem kvartilsættet, og bestem hvor stor en procentdel af københavnere over 55 år, der har taget en lang videregående uddannelse.

- Opgave 8** Billedet viser en trekantet bæreramme på Odins bro ved Odense Havn.



Figuren viser en model af den trekantede bæreramme.



Det oplyses, at $|AB| = 79$ m, samt at $\angle A = 39^\circ$ og $\angle B = 21^\circ$.

- Bestem længden af de skrå kanter AC og BC .
- Bestem højden af bærerammen.

Det oplyses, at $|AD| = 37$ m.

- Bestem $\angle D$ i trekant ACD .

- Opgave 9** Tabellen nedenfor viser udviklingen i antallet af internetopkoblede elektroniske apparater, som ikke er smartphones, i perioden 2010 til 2014.

Årstal	2010	2011	2012	2013	2014
Antal apparater (mia.)	1,1	1,3	1,8	2,3	3,2

I en model kan udviklingen beskrives ved en funktion af typen

$$f(x) = b \cdot a^x,$$

hvor $f(x)$ betegner antallet af apparater (målt i mia.) til tidspunktet x (målt i år efter 2010).

- a) Bestem en forskrift for f .
- b) Forklar betydningen af det fundne tal a .

I modellen kan udviklingen i antallet af smartphones i samme periode beskrives ved

$$g(x) = 0,59 \cdot x + 6,5,$$

hvor $g(x)$ betegner antallet af smartphones (målt i mia.) til tidspunktet x (målt i år efter 2010).

- c) Benyt modellen til at bestemme det tidspunkt, hvor antallet af internetopkoblede elektroniske apparater, som ikke er smartphones, overstiger antallet af smartphones.

Kilde: MIT Technology Review 2014.

Opgave 10

Foto: contourbox.dk

For at undersøge, om der er sammenhæng mellem at være hjulbenet og spille fodbold har man på tilfældig måde udtaget en stikprøve på 218 drenge og optalt antallet af drenge, der spiller fodbold, og antallet af drenge, der er hjulbenede. Resultatet af optællingen fremgår af tabellen.

	Hjulbenet	Ikke hjulbenet
Spiller fodbold	15	65
Spiller ikke fodbold	16	122

- a) Opstil en nulhypotese, og undersøg, om nulhypotesen kan forkastes på et signifikansniveau på 5%.

Kilde: Politiken 2014

Opgave 11 En funktion f er bestemt ved

$$f(x) = (x^2 - 15) \cdot e^{-x}.$$

- a) Bestem en ligning for tangenten til grafen for f i punktet $P(0, f(0))$.
- b) Bestem monotoniforholdene for f .

Opgave 12



Grafik: coulорbox.dk

I en psykofysisk model kan sammenhængen mellem den faktiske og den oplevede muskelbelastning for en person beskrives ved

$$O(x) = x^{1,7},$$

hvor $O(x)$ er den oplevede muskelbelastning, når den faktiske muskelbelastning er x . Begge størrelser er målt i enheder, der er uden betydning her.

- Bestem den faktiske muskelbelastning, når den oplevede muskelbelastning er 2.
- Bestem, hvor mange procent den oplevede muskelbelastning øges med, når den faktiske muskelbelastning øges med 50%.

Kilde: http://www.cis.rit.edu/people/faculty/montag/vandplite/pages/chap_6/ch6p10.html

Opgave 13

En funktion f er bestemt ved

$$f(x) = \frac{1}{25} \cdot x^4 - 2x^2 + 25.$$

Grafen for f afgrænser i første og anden kvadrant sammen med førsteaksen en punktmængde M , der har et areal.

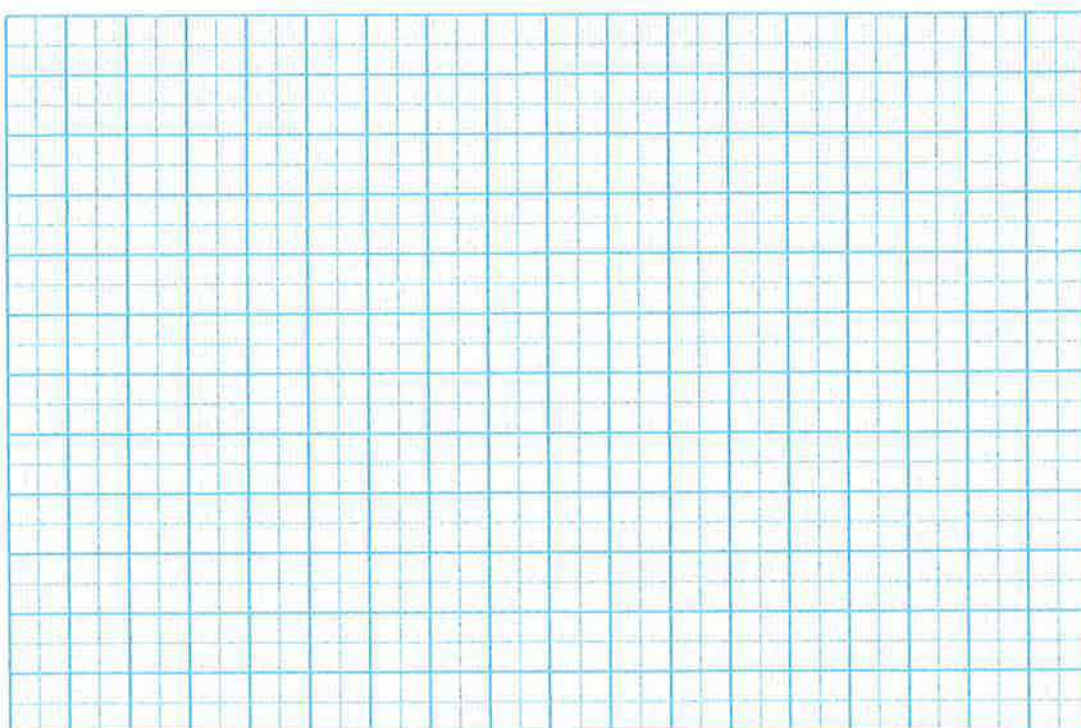
- Tegn en skitse af M , og bestem arealet af M .

BILAG

Bilaget kan indgå i besvarelsen.

Skole	Hold		ID
Navn	Ark nr	Antal ark i alt	Tilsynsførende

4





**UNDERVISNINGS
MINISTERIET**
KVALITETS- OG
TILSYNSSTYRELSEN

Matematik A

Studentereksamen

Digital eksamensopgave med adgang til internettet

Torsdag den 28. maj 2015
kl. 09.00-14.00

Opgavesættet er delt i to dele.

Delprøve 1: 2 timer med autoriseret formelsamling

Delprøve 2: 3 timer med alle hjælpemidler

Delprøve 1 består af 12 spørgsmål

Delprøve 2 består af 13 spørgsmål

Alle spørgsmål tillægges hver 10 point

Bedømmelsen af det skriftlige eksamenssæt

I bedømmelsen af besvarelsen af de enkelte spørgsmål og i helhedsindtrykket vil der blive lagt vægt på, om eksaminandens tankegang fremgår klart af besvarelsen. Dette vurderes blandt andet ud fra kravene beskrevet i de følgende fem kategorier:

1. TEKST

Besvarelsen skal indeholde en forbindende tekst fra start til slut, der giver en klar præsentation af, hvad den enkelte opgave og de enkelte delspørgsmål går ud på.

2. NOTATION OG LAYOUT

Der kræves en hensigtsmæssig opstilling af besvarelsen i overensstemmelse med god matematisk skik, herunder en redegørelse for den matematiske notation, der indføres og anvendes, og som ikke kan henføres til standardviden.

3. REDEGØRELSE OG DOKUMENTATION

Besvarelsen skal indeholde en redegørelse for den anvendte fremgangsmåde og dokumentation i form af et passende antal mellemregninger og/eller en matematisk forklaring på brugen af de forskellige faciliteter, som et værktøjsprogram tilbyder.

4. FIGURER

I besvarelsen skal der indgå en hensigtsmæssig brug af figurer og illustrationer, og der skal være en tydelig sammenhæng mellem tekst og figurer.

5. KONKLUSION

Besvarelsen skal indeholde en afrunding af de forskellige spørgsmål med præcise konklusioner, præsenteret i et klart sprog og/eller med brug af almindelig matematisk notation.

Delprøven uden hjælpemidler

Kl. 09.00 – 11.00

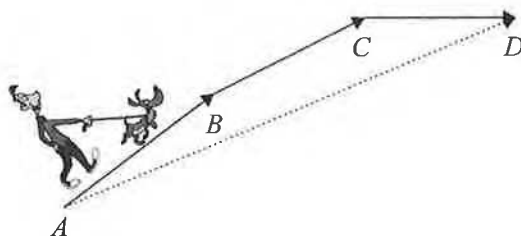
- Opgave 1** a) Vis, at $x = 2$ er en løsning til ligningen

$$2x^4 + 3x - 38 = 0.$$

- Opgave 2** Prisen på en vare er 4500 kr. i år 2000. Prisen på varen aftager herefter med 10% pr. år.

- a) Indfør passende variable, og opstil en model, der beskriver prisen på varen som funktion af antal år efter 2000.

- Opgave 3** En person følger på sin gåtur en rute fra punktet A til punktet D . Figuren viser en model af ruten.



I et koordinatsystem beskrives modellen af rutens dele ved vektorerne

$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}, \overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix} \text{ og } \overrightarrow{CD} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

- a) Bestem længden af ruten.

Personen kan lægge sin rute, så turen går direkte fra A til D .

- b) Bestem længden af denne rute.

- Opgave 4** Nedenstående tal viser månedslønnen for de ansatte på en bestemt arbejdsplads.

Til opgaven
hører et bilag

Månedsløn (i 1000 kr.)	0 – 20	20 – 40	40 – 60	60 – 80	80 – 100
Frekvens i %	19	41	20	15	5

- a) Tegn en sumkurve, og aflæs kvartilsættet. Brug eventuelt vedlagte bilag.

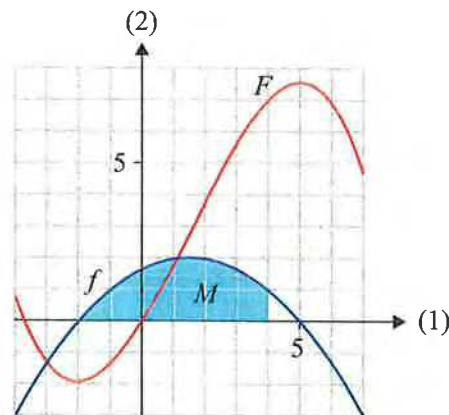
Opgave 5 a) Reducér udtrykket $2(x^2 + 3x) + (x - 3)^2$.

Opgave 6 En funktion f er givet ved

$$f(x) = x^3 - 12x + 1.$$

a) Bestem monotoniforholdene for f .

Opgave 7



Figuren viser graferne for f og F , hvor F er en stamfunktion til f .
Grafen for f afgrænser sammen med førsteaksen og linjen med ligningen $x = 4$ en punktmængde M , der har et areal.

a) Bestem $F'(-1)$.

b) Bestem arealet af M .

Opgave 8 Trekant ABC er retvinklet med $\angle C = 90^\circ$, $a = 3$ og $b = 4$.

Trekant DEF er ensvinklet med trekant ABC , og omkredsen af trekant DEF er 36.

a) Bestem længden af hver af siderne i trekant DEF .

Opgave 9 En cirkel er givet ved ligningen

$$x^2 + y^2 = 25.$$

a) Vis, at punktet $Q(3,4)$ ligger på cirkelperiferien, og bestem en ligning for tangenten til cirklen i Q .

Punktet $P(x_0, y_0)$ er et vilkårligt punkt på cirkelperiferien.

b) Vis, at ligningen for tangenten i P er $x_0 \cdot x + y_0 \cdot y = 25$.

Delprøven med hjælpemidler

K1. 09.00 – 14.00

Opgave 10



Foto: colourbox.dk

Filmen Spider-Man 3 havde premiere i USA den 4. maj 2007. I nedenstående tabel ses hvor mange penge, filmen indtjente pr. uge efter premieren.

Uger efter premieren	1	2	3	4	5	6
Indtjening pr. uge (mio. \$)	182,1	71,3	36,3	21,1	10,5	6,2

I en model antages, at indtjeningen pr. uge kan beskrives ved en funktion af typen

$$f(x) = b \cdot a^x,$$

hvor $f(x)$ betegner indtjeningen pr. uge (målt i mio. \$) til tidspunktet x (målt i uger efter premieren).

- Benyt tabellens data til at bestemme konstanterne a og b .
- Benyt modellen til at bestemme, hvor meget filmen indtjente i uge 10 efter premieren, og sammenlign tallet med den faktiske indtjening i uge 10, som var 0,45 mio. \$.

Kilde: Box Office Mojo

Opgave 11

En geometrisk række er givet ved

$$s = \sum_{n=0}^{\infty} 9 \cdot 0,8^n.$$

- Bestem delsummen s_{20} , og gør rede for, at rækken er konvergent.

Opgave 12

I en trekant ABC er $a = 10$, $b = 7$ og $c = 8$.

- Bestem $\angle B$.

Midtpunktet af AB kaldes M , og midtnormalen for linjestykket AB skærer linjestykket BC i punktet D .

- Bestem arealet af trekant BDM .

Opgave 13 Funktionen f er givet ved

$$f(x) = \frac{5x}{1+x^2}$$

- a) Bestem Taylorpolynomiet af grad 7 hørende til f med udviklingspunkt i $x_0 = 0$, og bestem størrelsen af restleddet for $x = 0,1$.

Opgave 14



Foto: colourbox.dk

På et hotel er en stikprøve på 200 tilfældige gæster blevet spurgt, hvorvidt de var tilfredse med morgenmaden.

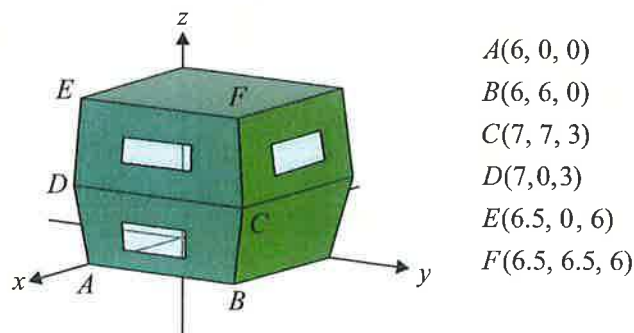
Svarene fra de 200 gæster fordelte sig som det fremgår af nedenstående tabel

Køn\Tilfreds	Ja	Nej
Mand	34	48
Kvinde	65	53

- a) Opstil en nulhypotese, og undersøg med et signifikansniveau på 5% om nulhypotesen kan forkastes.

Opgave 15

Figuren viser en model af et futuristisk hus indtegnet i et koordinatsystem i rummet med enheden meter på alle akser. Koordinatsættene til nogle af husets hjørner er angivet på figuren.



- a) Bestem en ligning for den plan α , som hussiden $ABCD$ er en del af, og bestem arealet af hussiden $ABCD$.

Hussiden $CDEF$ ligger i planen β med ligningen

$$78x + 13z - 585 = 0.$$

- b) Bestem vinklen mellem de to hussider $ABCD$ og $CDEF$.

Opgave 16



Grafik: colour box.dk

Bestanden af laks i et bestemt område kan beskrives med *Ricker*-følgen

$$p_n = 1,535 \cdot p_{n-1} \cdot e^{-0,00076 p_{n-1}}, \quad n = 1, 2, \dots,$$

hvor p_n antal laks (målt i tusinder), og n er antal år efter 2001.

I 2001 anslog man, at bestanden var på 700 tusinde laks.

- Bestem antallet af laks de 5 efterfølgende år, og tegn et tilhørende plot.
- Bestem ligevægtstilstanden for denne bestand af laks.

Opgave 17

I en model kan udviklingen i antallet af kræftceller for en bestemt type kræftsvulst beskrives ved differentialligningen

$$N'(t) = 0,6 \cdot e^{-k t} \cdot N(t),$$

hvor $N(t)$ er antallet af kræftceller (målt i mio.) til tiden t (målt i måneder), og k er en konstant.

Det oplyses, at der til tiden $t = 5$ er 131 mio. kræftceller, og at dette antal vokser med 1,35 mio. kræftceller om måneden til tiden $t = 5$.

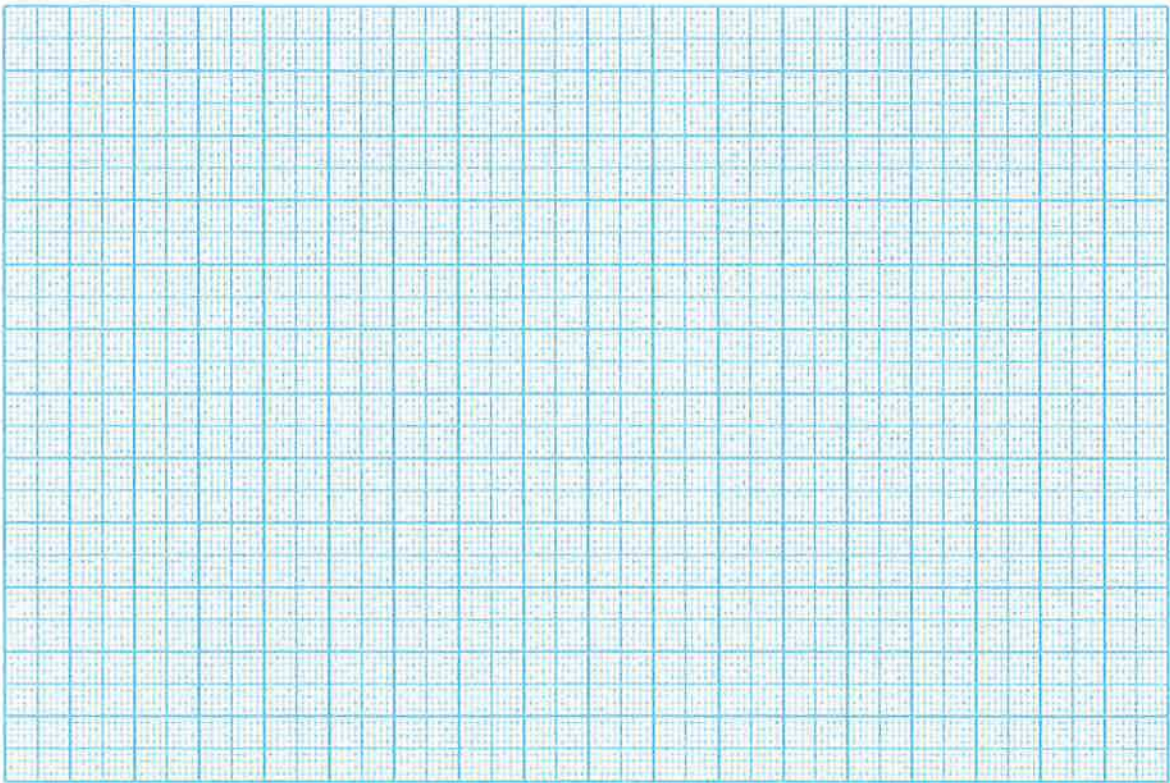
- Bestem konstanten k .
- Bestemt en forskrift for $N(t)$, og bestem antallet af kræftceller efter 1 måned.

BILAG

Bilaget kan indgå i besvarelsen.

Skole	Hold		ID
Navn	Ark nr	Antal ark i alt	Tilsynsførende

4





**UNDERVISNINGS
MINISTERIET**
KVALITETS- OG
TILSYNSSTYRELSEN

Matematik A

Studentereksamen

Opgavesættet er delt i to dele.

Delprøven uden hjælpemidler består af opgave 1-6 med i alt 6 spørgsmål.
Delprøven med hjælpemidler består af opgave 7-14 med i alt 19 spørgsmål.

De 25 spørgsmål indgår med lige vægt i bedømmelsen.

Bedømmelsen af det skriftlige eksamenssæt

I bedømmelsen af besvarelsen af de enkelte spørgsmål og i helhedsindtrykket vil der blive lagt vægt på, om eksaminandens tankegang fremgår klart af besvarelsen. Dette vurderes blandt andet ud fra kravene beskrevet i de følgende fem kategorier:

1. TEKST

Besvarelsen skal indeholde en forbindende tekst fra start til slut, der giver en klar præsentation af, hvad den enkelte opgave og de enkelte delspørgsmål går ud på.

2. NOTATION OG LAYOUT

Der kræves en hensigtsmæssig opstilling af besvarelsen i overensstemmelse med god matematisk skik, herunder en redegørelse for den matematiske notation, der indføres og anvendes, og som ikke kan henføres til standardviden.

3. REDEGØRELSE OG DOKUMENTATION

Besvarelsen skal indeholde en redegørelse for den anvendte fremgangsmåde og dokumentation i form af et passende antal mellemregninger og/eller en matematisk forklaring på brugen af de forskellige faciliteter, som et værktøjsprogram tilbyder.

4. FIGURER

I besvarelsen skal der indgå en hensigtsmæssig brug af figurer og illustrationer, og der skal være en tydelig sammenhæng mellem tekst og figurer.

5. KONKLUSION

Besvarelsen skal indeholde en afrunding af de forskellige spørgsmål med præcise konklusioner, præsenteret i et klart sprog og/eller med brug af almindelig matematisk notation.

Delprøven uden hjælpemidler

Kl. 09.00 – 10.00

Opgave 1



Foto: Colourbox

I år 2001 var der 21365 slædehunde i Grønland. I perioden 2001-2011 faldt antallet af slædehunde i Grønland med 1135 slædehunde om året.

Indfør passende variable, og opstil en model, der beskriver udviklingen i antallet af slædehunde i Grønland i perioden 2001-2011.

Opgave 2

To vektorer i planen er givet ved

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \end{pmatrix} \text{ og } \vec{b} = \begin{pmatrix} t \\ 3 \end{pmatrix},$$

hvor t er et tal.

Bestem værdien af t , så $\vec{a}$ og $\vec{b}$ er ortogonale.

Opgave 3

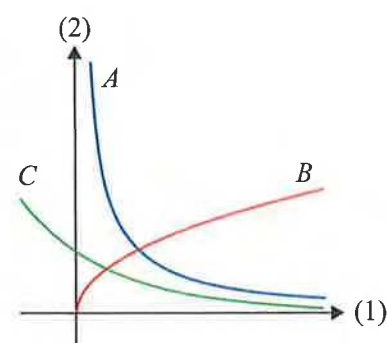
På figuren ses graferne for tre funktioner

$$f(x) = x^{-1}$$

$$g(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$$

$$h(x) = x^{\frac{1}{2}}$$

Begrund for hver af graferne A , B og C , hvilken af funktionerne f , g og h den er graf for.



Opgave 4

En funktion f er givet ved

$$f(x) = (2x + 1) \cdot \ln(x), \text{ hvor } x > 0.$$

Bestem $f'(1)$.

- Opgave 5** Om en funktion f oplyses, at punktet $P(0,3)$ ligger på grafen for f , samt at funktionen er løsning til differentialligningen

$$\frac{dy}{dx} = e^x + 2y.$$

Bestem en ligning for tangenten til grafen for f i punktet P .

- Opgave 6** En parabel er graf for funktionen

$$f(x) = a \cdot x^2 + b \cdot x + 21.$$

Parablen har toppunkt i punktet $T(5, -4)$, og den skærer førsteaksen i punkterne A og B . Det oplyses, at $A(3, 0)$.

Bestem koordinatsættet til B , og bestem tallene a og b .

Besvarelsen afleveres kl. 10.00
--

Delprøven med hjælpemidler

Kl. 09.00 – 14.00

Opgave 7 En funktion f er bestemt ved

$$f(x) = 2x^3 - \frac{1}{2}x^2 - x + 7.$$

Det oplyses, at f har netop ét nulpunkt P .

- Bestem koordinatsættet til P .
- Bestem $f'(x)$, og bestem en ligning for tangenten til grafen for f i punktet $Q(2, f(2))$.
- Bestem monotoniforholdene for f .

Opgave 8



Foto: colourbox

Vægten af en torsk i et bestemt havområde afhænger af torskens alder. Udviklingen i vægten af en torsk fra dette område kan beskrives ved følgende model

$$v(x) = \frac{10,28}{1 + 3,177 \cdot e^{-0,224x}},$$

hvor $v(x)$ betegner vægten af en torsk (målt i kg), og x betegner alderen af en torsk (målt i år).

- Tegn grafen for v , og benyt modellen til at bestemme alderen af en torsk, der vejer 8,5 kg.
- Bestem det tidspunkt, hvor væksthastigheden for vægten af en torsk ifølge modellen er størst.

Opgave 9

En stikprøve fra en population er udvalgt på tilfældig måde. Personerne i stikprøven har svaret på spørgsmålet

"Bør der indføres forbud mod at bære hovedbeklædning i offentlige bygninger?".

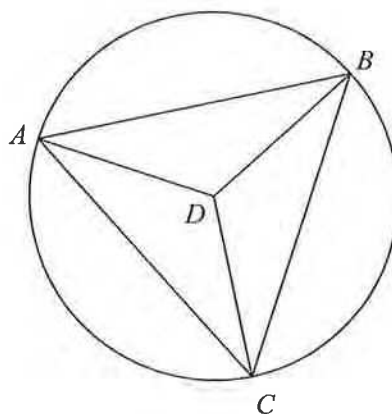
Svarene på spørgsmålet er opdelt efter personernes uddannelse, og svarene fordeler sig som vist i tabellen.

	Ja	Nej
Erhvervsuddannelse	102	132
Videregående uddannelse af kort varighed	43	63
Videregående uddannelse af mellemlang varighed	80	157
Videregående uddannelse af lang varighed	30	84
Grundskoleuddannelse	72	99

På grundlag af svarene fra personerne i stikprøven skal det undersøges, om der er uafhængighed mellem uddannelse og holdning til spørgsmålet.

- Opstil en nulhypotese, og bestem med udgangspunkt heri de forventede værdier.
- Afgør på et 5% signifikansniveau, om nulhypotesen kan forkastes.

Opgave 10



På figuren ses en model af et cafébord (set oppefra). Bordet har form som en cirkel, hvori der er indtegnet en ligesidet trekant ABC , der igen er delt op i 3 kongruente og ligebenede trekanter ABD , BDC og CDA (se billedet). Bordets radius er 50 cm.

- Bestem $\angle ADB$, samt arealet af trekant ABC .
- Bestem omkredsen af trekant ABC .

Opgave 11 For en bestemt population af fisk har man gennem en årrække opgjort den relative væksthastighed (målt i år^{-1}). Resultatet fremgår af nedenstående tabel.

Årstal	2001	2002	2003	2004	2005	2006
Relativ væksthastighed	0,398	0,302	0,259	0,221	0,158	0,124

I en model kan udviklingen i den relative væksthastighed beskrives ved en funktion af typen

$$f(t) = b \cdot a^t,$$

hvor $f(t)$ betegner den relative væksthastighed (målt i år^{-1}) til tidspunktet t (målt i antal år efter 2001).

- Benyt tabellens data til at bestemme a og b .
- Benyt modellen til at bestemme det år, hvor den relative væksthastighed er $0,1 \text{ år}^{-1}$, og bestem halveringstiden for f .

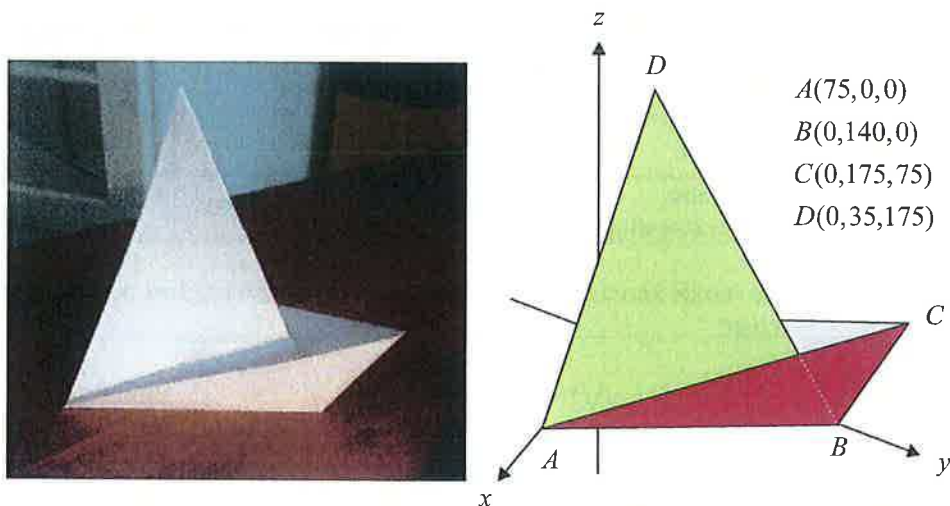
I modellen kan antallet af fisk i populationen beskrives ved en funktion, der er løsning til differentialligningen

$$\frac{1}{N} \cdot \frac{dN}{dt} = f(t),$$

hvor $N(t)$ er antal fisk i populationen til tidspunktet t (målt i antal år efter 2001). Det oplyses, at der er 520 fisk i populationen i år 2001.

- Bestem en forskrift for N , skitsér grafen for N , og bestem det år, hvor antallet af fisk i populationen overstiger 2000.

Opgave 12



På figuren ses en model af et origamiskib indtegnet i et koordinatsystem i rummet med enheden mm på alle akser. Sejlskibets sejl er udsپændt mellem punkterne A , B og D .

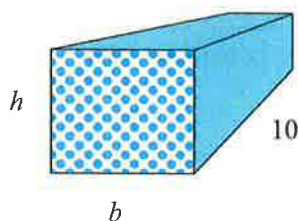
- a) Bestem en ligning for den plan α , der indeholder sejlskibets sejl, og bestem arealet af sejlskibets sejl.

Det oplyses, at den plan β , som indeholder punkterne A , B og C , kan beskrives ved ligningen

$$28x + 15y - 7z - 2100 = 0.$$

- b) Bestem den spidse vinkel mellem sejlskibets sejl og den side af sejlskibet, der er udsپændt af punkterne A , B og C .

Opgave 13



En bestemt faskine består af en ydre lukket kasse samt et porøst indre. Faskinens bredde benævnes b (målt i m), højden benævnes h (målt i m) og længden er 10 m.

- a) Gør rede for, at faskinens ydre areal er givet ved

$$O = 2 \cdot b \cdot h + 20 \cdot b + 20 \cdot h.$$

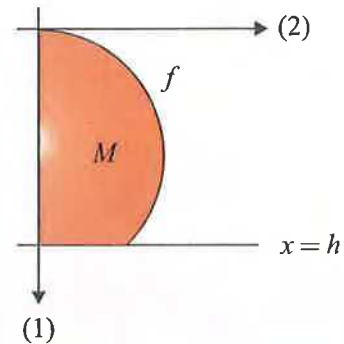
Det volumen, som faskinen kan rumme, betegnes V (målt i m^3). Det oplyses, at V er givet ved

$$V = \frac{20 \cdot b \cdot h}{3}.$$

Endvidere oplyses, at faskinen kan rumme 100 m^3 vand, og at $0 < b < 10$.

- b) Bestem h udtrykt ved b , og bestem den værdi af b , der gør faskinens ydre areal mindst mulig.

Opgave 14



En funktion f er bestemt ved

$$f(x) = \sqrt{-x^2 + 20x}, \text{ hvor } 0 \leq x \leq 20.$$

Grafen for f afgrænser sammen med førsteaksen og linjen $x = h$ et område M .
Det oplyses, at $10 \leq h \leq 20$.

Det ydre af en serie af lamper har form som overfladen af det omdrejningslegeme, der fremkommer, når M drejes 360° omkring førsteaksen. Enheden på begge akser er cm.

- a) Tegn grafen for f , og bestem lampens diameter på det bredeste sted og ved lampens åbning, når $h = 18$.

Det oplyses, at lampens overfladeareal kan beregnes ved integralet

$$O = 2\pi \int_0^h f(x) \cdot \sqrt{1 + f'(x)^2} dx.$$

- b) Bestem h , når overfladearealet er 1005.

Det oplyses endvidere, at lamperne i serien har form som en del af en kugle.

- c) Bestem en ligning for den kugle, som lampen er en del af.



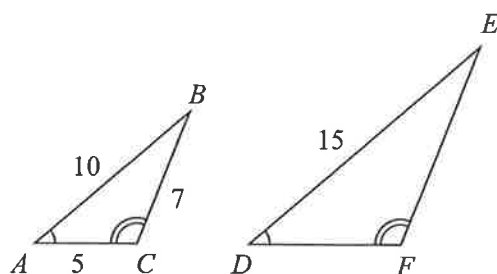
**UNDERVISNINGS
MINISTERIET**
KVALITETS- OG
TILSYNSSTYRELSEN

Matematik B

Studentereksamen

Torsdag den 28. maj 2015
kl. 9.00 - 13.00

Opgave 5



På figuren ses to ensvinklede trekanter ABC og DEF . Nogle af sidelængderne er angivet på figuren.

Bestem omkredsen af trekant DEF .

Opgave 6 Bestem integralet

$$\int (3x^2 + 4x + 2) dx .$$

Besvarelsen afleveres kl. 10.00

Delprøven med hjælpemidler

Kl. 09.00 – 13.00

Opgave 7

I en løbeklub har man for syv nye medlemmer undersøgt sammenhængen mellem løbetiden i et testløb på fem km og løbetiden i en halvmaraton, efter de har gennemført et bestemt træningsprogram.

Tabellen viser for de syv medlemmer sammenhængen mellem løbetiden i testløbet og løbetiden i halvmaratonen.

Løbetid i testløbet (minutter)	16	19	23	25	28	31	35
Løbetid i halvmaratonen (minutter)	76	87	107	119	139	160	202

I en model antages det, at sammenhængen mellem løbetiden i testløbet og løbetiden i halvmaratonen kan beskrives ved en funktion af typen

$$f(x) = b \cdot a^x,$$

hvor x er løbetiden i testløbet (målt i minutter), og $f(x)$ er løbetiden i halvmaratonen (målt i minutter).

- Benyt tabellens data til at bestemme konstanterne a og b .
- Benyt modellen til at bestemme den løbetid, en løber kan forvente at opnå i en halvmaraton, når løberens løbetid i testløbet er på 30 minutter.

Kilde: <http://aktivtraening.dk/test-beregn/beregn/beregn-din-halvmaraton-tid>

Opgave 8

I trekant ABC er $a = 9$, $b = 13$ og $c = 7$.

- Tegn en skitse af trekant ABC , og bestem $\angle A$.
- Bestem arealet af trekant ABC , og bestem længden af højden fra B .

Opgave 9

Hos vinkekrabber har hannerne en overdimensioneret klo, som bl.a. bruges til territoriekampe. Sammenhængen mellem vægten K af den overdimensionerede klo (målt i mg) og vægten M af hele krabben (målt i mg) er for en speciel type meget små vinkekrabber givet ved

$$K = 0,036 \cdot M^{1,356}.$$



- Bestem vægten af kloen, hvis hele krabbens vægt er 400 mg, og bestem vægten af hele krabben, hvis kloens vægt er 53 mg.
- Hvor mange procent vokser kloens vægt med, når krabbens vægt vokser med 30%?

Opgave 10 En funktion f er defineret ved

$$f(x) = 3 \cdot \ln(x+1) - x^2, \quad x > -1.$$

- a) Bestem en ligning for tangenten til grafen for f i punktet $P(0, f(0))$.
- b) Bestem monotoniforholdene for f .

Opgave 11



I en model for udviklingen i vægten af hunkalkuner fra en bestemt race gælder, at

$$f(t) = 0,0038 \cdot t^4 - 0,42 \cdot t^3 + 12,12 \cdot t^2 + 24,13 \cdot t + 16,67, \quad 0 \leq t \leq 52,$$

hvor $f(t)$ er vægten af hunkalkunen (målt i gram), og t er alderen af hunkalkunen (målt i uger).

- a) Tegn grafen for f .
- b) Benyt modellen til at bestemme den alder hunkalkunen har, når den opnår sin maksimale vægt.
- c) Bestem $f'(10)$, og giv en fortolkning af dette tal.

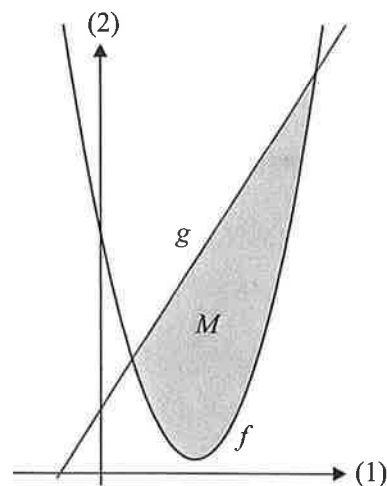
Kilde: *Mathematical modeling of the native Mexican turkey's growth*, E. Pérez-Lara et al., *Open Journal of Animal Sciences*, Vol.3, No.4, 305-310 (2013).

Opgave 12 To funktioner f og g er bestemt ved

$$\begin{aligned} f(x) &= x^2 - 6x + 10 \\ g(x) &= 2x + 3. \end{aligned}$$

Graferne for f og g afgrænser i 1. kvadrant en punktmængde M , der har et areal.

- a) Bestem arealet af M .



Opgave 13

For en bestemt type majs med rynkede, glatte, gule og violette kerner gælder i en biologisk model, at fordelingen af kerner fra en plante vil være som i nedenstående tabel:

Udseende	Fordeling
Violet og glat	9/16
Violet og rynket	3/16
Gul og glat	3/16
Gul og rynket	1/16

Man har indsamlet en række majs kobler fra samme plante af denne type og fundet følgende fordeling af kernerne:

Udseende	Antal kerner
Violet og glat	648
Violet og rynket	237
Gul og glat	195
Gul og rynket	63

- Opstil en nulhypotese til at belyse, om antallet af kerner følger den biologiske model, og bestem de forventede værdier.
- Afgør på et 5% signifikansniveau, om nulhypotesen kan forkastes.

Kilde: <http://www.biologycorner.com/>



**UNDERVISNINGS
MINISTERIET**
STYRELSEN FOR
UNDERVISNING OG KVALITET

Matematik A

Studentereksamen

Digital eksamensopgave med adgang til internettet

Torsdag den 13. august 2015
kl. 09.00-14.00

Opgavesættet er delt i to dele.

Delprøve 1: 2 timer med autoriseret formelsamling

Delprøve 2: 3 timer med alle hjælpemidler

Delprøve 1 består af 12 spørgsmål

Delprøve 2 består af 13 spørgsmål

Alle spørgsmål tillægges hver 10 point

Bedømmelsen af det skriftlige eksamenssæt

I bedømmelsen af besvarelsen af de enkelte spørgsmål og i helhedsindtrykket vil der blive lagt vægt på, om eksaminandens tankegang fremgår klart af besvarelsen. Dette vurderes blandt andet ud fra kravene beskrevet i de følgende fem kategorier:

1. TEKST

Besvarelsen skal indeholde en forbindende tekst fra start til slut, der giver en klar præsentation af, hvad den enkelte opgave og de enkelte delspørgsmål går ud på.

2. NOTATION OG LAYOUT

Der kræves en hensigtsmæssig opstilling af besvarelsen i overensstemmelse med god matematisk skik, herunder en redegørelse for den matematiske notation, der indføres og anvendes, og som ikke kan henføres til standardviden.

3. REDEGØRELSE OG DOKUMENTATION

Besvarelsen skal indeholde en redegørelse for den anvendte fremgangsmåde og dokumentation i form af et passende antal mellemregninger og/eller en matematisk forklaring på brugen af de forskellige faciliteter, som et værktøjsprogram tilbyder.

4. FIGURER

I besvarelsen skal der indgå en hensigtsmæssig brug af figurer og illustrationer, og der skal være en tydelig sammenhæng mellem tekst og figurer.

5. KONKLUSION

Besvarelsen skal indeholde en afrunding af de forskellige spørgsmål med præcise konklusioner, præsenteret i et klart sprog og/eller med brug af almindelig matematisk notation.

Delprøven uden hjælpemidler

Kl. 09.00 – 11.00

Opgave 1 a) Reducér udtrykket $(p - 2q)^2 - 4q^2$.

Opgave 2 Et firma afholder en konference. Prisen for leje af lokaler og foredragsholdere er 35.000 kr. Hertil kommer en udgift på 4.000 kr. pr. deltager til mad og overnatning.

a) Indfør passende variable, og opstil en model, der angiver den samlede pris for konferencen som funktion af deltagerantallet.

Opgave 3 To linjer l og m i planen er givet ved

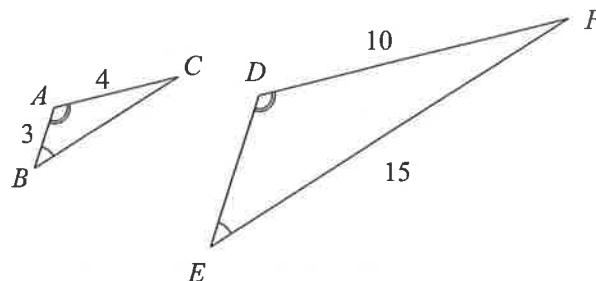
$$m: y = 2x + 3.$$

$$l: \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 18 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

a) Bestem koordinatsættet til skæringspunktet mellem m og l .

b) Bestem en ligning for l .

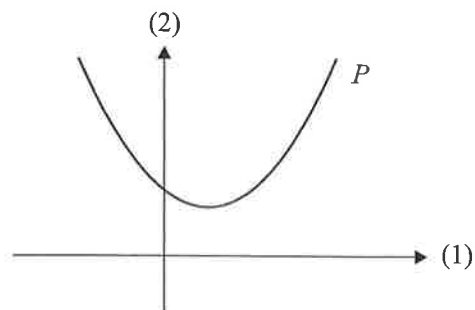
Opgave 4



På figuren ses en skitse af to ensvinklede trekanter ABC og DEF . Nogle af sidelængderne er angivet på figuren.

a) Bestem længden af hver af siderne BC og DE .

Opgave 5



På figuren ses parabeln P med ligningen

$$y = ax^2 + bx + c.$$

Til opgaven
hører et bilag

To andre parabler er givet ved ligningerne

$$P_1: y = ax^2 + bx - c$$

$$P_2: y = ax^2 - bx + c$$

a) Indtegn de tre parabler i samme koordinatsystem. Vedlagte bilag kan benyttes.

Opgave 6

To funktioner f og g er givet ved

$$f(x) = x^2 - x + 3$$

$$g(x) = x + 3$$

a) Bestem koordinatsættet til hvert af de to skæringspunkter mellem graferne for f og g .

Graferne for f og g afgrænser en punktmængde M , der har et areal.

b) Bestem arealet af M .

Opgave 7

En differentiabel funktion f opfylder følgende:

f har definitionsmængde $]0;10[$

$$f(2) = 4 \text{ og } f(5) = 7$$

Fortegn og nulpunkter for f' er som angivet på tallinjen:



a) Tegn en mulig graf for f .

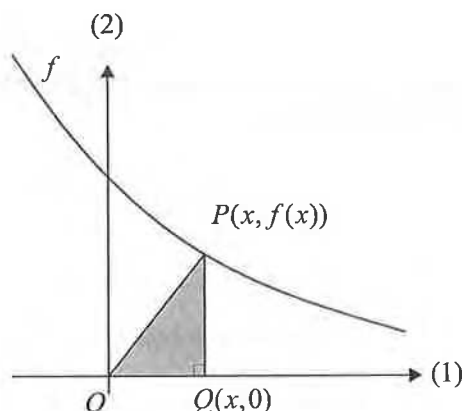
Opgave 8

Om en funktion f oplyses det, at $P(2, -1)$ er et punkt på grafen for f , samt at f er løsning til differentialligningen

$$\frac{dy}{dx} - 5y = 2x + 3.$$

- a) Bestem en ligning for tangenten til grafen for f i P .

Opgave 9



En funktion f er bestemt ved

$$f(x) = e^{-\frac{1}{2}x}.$$

Punktet $P(x, f(x))$ ligger på grafen for f . Punktet Q er projektionen af P på førsteaksen. O betegner koordinatsystemets begyndelsespunkt (se figuren).

- a) Gør rede for, at arealet af trekant OPQ som funktion af x er bestemt ved

$$A(x) = \frac{1}{2} \cdot x \cdot e^{-\frac{1}{2}x}.$$

- b) Bestemt $A'(x)$, og bestem den værdi af x , der gør arealet af trekant OPQ størst muligt.

Besvarelsen afleveres kl. 11.00

Delprøven med hjælpemidler

Kl. 09.00 – 14.00

Opgave 10 Nedenstående tabel viser BNP pr. indbygger (målt i USD) i USA for perioden 1900-2000 justeret til 1900-tals værdi.

År	1900	1920	1940	1960	1980	2000
BNP	5	6	8	12	18	26

I en model kan sammenhængen beskrives ved

$$U(t) = b \cdot a^t,$$

hvor $U(t)$ betegner BNP pr. indbygger (målt i USD) i USA til tidspunktet t (målt i år efter 1900).

- a) Benyt tabellens data til at bestemme konstanterne i modellen, og bestem fordoblingstiden.

For indbyggerne i Sydkorea kan udviklingen i BNP pr. indbygger ifølge samme model beskrives ved

$$S(t) = 0,017 \cdot 1,065^t,$$

hvor $S(t)$ betegner BNP pr. indbygger (målt i USD) i Sydkorea til tidspunktet t (målt i år efter 1900).

- b) Benyt modellen til at forudsige, hvornår BNP pr. indbygger i Sydkorea overstiger BNP pr. indbygger i USA.

Kilde: Politiken 12.11.14

Opgave 11 En funktion f er bestemt ved

$$f(x) = \frac{1}{1+x^2}.$$

- a) Bestem Taylorpolynomiet T af grad 2 med udviklingspunkt i $x_0 = 0$, og tegn graferne for f og T i samme koordinatsystem. Kommentér resultatet.

Opgave 12 I trekant ABC er $a = 5$, $b = 8$ og $\angle C = 34^\circ$.

- a) Bestem længden af AB , og bestem arealet af trekant ABC .

Fodpunktet for højden fra B kaldes H .

- b) Bestem længden af BH , og bestem længden af AH .

Opgave 13 I et koordinatsystem i rummet er en kugle K og en plan α bestemt ved ligningerne

$$K: x^2 - 14x + y^2 + 8y + z^2 - 26z + 65 = 0$$

$$\alpha: 3x - 4y + 12z = 24$$

- a) Gør rede for, at kuglen K har radius 13 og centrum i $(7, -4, 13)$.
- b) Vis, at α er en tangentplan til K , og bestem koordinatsættet til røringspunktet mellem α og K .

Opgave 14



Foto: colourbox.com

Et analyseinstitut har på tilfældig måde udtaget en stikprøve på 1000 personer for at undersøge danskernes holdning til indførelse af euroen i Danmark. Fordelingen i stikprøven er, at 65% er imod og 35% er for indførelse af euroen i Danmark. I stikprøven er der 509 kvinder og 491 mænd.

Analyseinstituttet vil teste, om der er uafhængighed mellem køn og holdning til indførelse af euroen i Danmark.

Analyseinstituttet opstiller derfor følgende nulhypotese:

Der er uafhængighed mellem køn og holdning til indførelse af euroen i Danmark.

- a) Udfyld rækketotaler og kolonnetotaler i nedenstående krydstabel, og bestem antallet af frihedsgrader.

	Kvinder	Mænd	Rækketotal
Imod euroen			
For euroen			
Kolonne-total			1000

I stikprøven er procentdelen af kvinder, der er imod indførelse af euroen i Danmark større end procentdelen af mænd, der er imod indførelsen af euroen i Danmark.

I det følgende betegner x det antal kvinder, der er imod indførelsen af euroen i Danmark.

Analyseinstituttet beslutter at teste med et signifikansniveau på 5% svarende til en kritisk værdi for teststørrelsen på 3,84.

- b) Udfyld resten af krydstabellen, og bestem den mindste værdi af x , så analyseinstituttet kan konkludere, at nulhypotesen kan forkastes.

- Opgave 15** I en model for afkøling af en gryde med mad kan grydens temperatur som funktion af tiden beskrives ved differentiaalligningen

$$\frac{dy}{dt} = 0,064 \cdot (19 - y),$$

hvor y benævner grydens temperatur (målt i $^{\circ}\text{C}$) til tidspunktet t (målt i minutter).
Grydens temperatur er 98°C til tidspunktet $t = 0$.

- Bestem en forskrift for grydens temperatur som funktion af tiden.
- Benyt modellen til at bestemme, hvor længe grydens temperatur er om at falde fra 60°C til 20°C .

- Opgave 16** I en model for udviklingen i den samlede vægt af en bestemt population af dyr følger udviklingen den diskrete logistiske model:

$$p_n = p_{n-1} + 0,1 \cdot p_{n-1} \cdot \left(1 - \frac{p_{n-1}}{200}\right), \quad n = 0, 1, 2, \dots,$$

hvor p_n betegner populationens samlede vægt (målt i tons) til tidspunktet n (målt i uger).
Det oplyses, at populationens samlede vægt er 10 tons til tidspunktet $n = 0$.

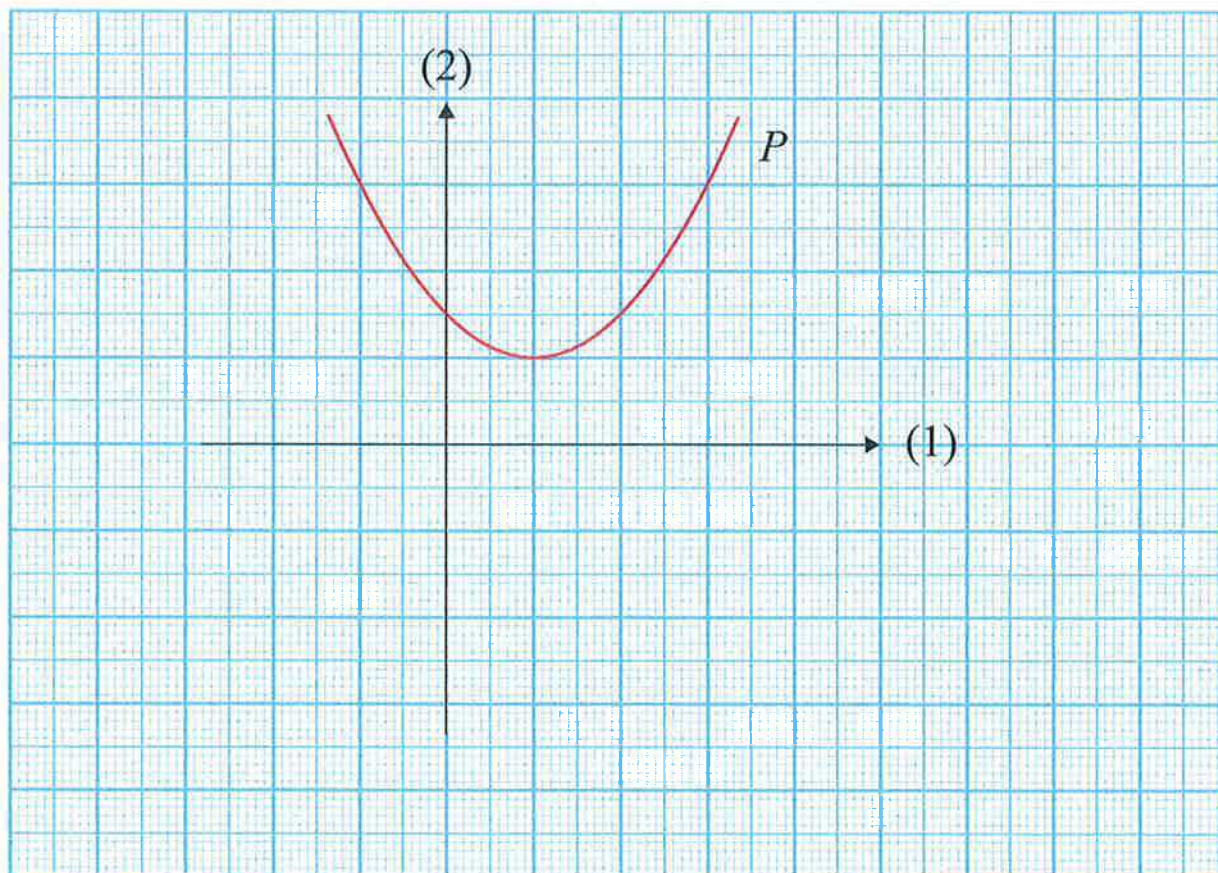
- Bestem populationens samlede vægt for hver af de efterfølgende 6 uger, og lav et punktplot over udviklingen.
- Bestem $p_{\text{ligevægt}}$, og benyt modellen til at bestemme, hvor mange uger der går, før populationens samlede vægt overstiger 150 tons.

BILAG

Bilaget kan indgå i besvarelsen.

Skole	Hold	ID	
Navn	Ark nr	Antal ark i alt	Tilsynsførende

5





**UNDERVISNINGS
MINISTERIET**
STYRELSEN FOR
UNDERVISNING OG KVALITET

Matematik A

Studentereksamen

Torsdag den 13. august 2015
kl. 9.00 - 14.00

Opgavesættet er delt i to dele.

Delprøven uden hjælpemidler består af opgave 1-6 med i alt 6 spørgsmål.
Delprøven med hjælpemidler består af opgave 7-15 med i alt 19 spørgsmål.

De 25 spørgsmål indgår med lige vægt i bedømmelsen.

Bedømmelsen af det skriftlige eksamenssæt

I bedømmelsen af besvarelsen af de enkelte spørgsmål og i helhedsindtrykket vil der blive lagt vægt på, om eksaminandens tankegang fremgår klart af besvarelsen. Dette vurderes blandt andet ud fra kravene beskrevet i de følgende fem kategorier:

1. TEKST

Besvarelsen skal indeholde en forbindende tekst fra start til slut, der giver en klar præsentation af, hvad den enkelte opgave og de enkelte delspørgsmål går ud på.

2. NOTATION OG LAYOUT

Der kræves en hensigtsmæssig opstilling af besvarelsen i overensstemmelse med god matematisk skik, herunder en redegørelse for den matematiske notation, der indføres og anvendes, og som ikke kan henføres til standardviden.

3. REDEGØRELSE OG DOKUMENTATION

Besvarelsen skal indeholde en redegørelse for den anvendte fremgangsmåde og dokumentation i form af et passende antal mellemregninger og/eller en matematisk forklaring på brugen af de forskellige faciliteter, som et værktøjsprogram tilbyder.

4. FIGURER

I besvarelsen skal der indgå en hensigtsmæssig brug af figurer og illustrationer, og der skal være en tydelig sammenhæng mellem tekst og figurer.

5. KONKLUSION

Besvarelsen skal indeholde en afrunding af de forskellige spørgsmål med præcise konklusioner, præsenteret i et klart sprog og/eller med brug af almindelig matematisk notation.

Delprøven uden hjælpemidler

Kl. 09.00 – 10.00

Opgave 1 En lineær sammenhæng er givet ved ligningen

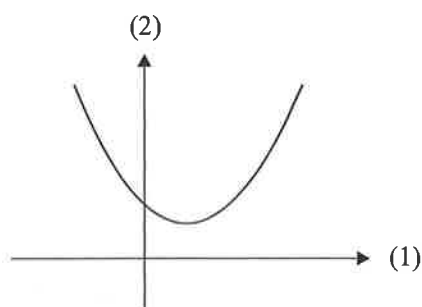
$$y = 3x + 4.$$

Bestem y , når $x = 7$, og bestem, hvor meget y vokser med, når x vokser med 5.

Opgave 2 Prisen for en bestemt vare antages at vokse med 4,5% pr. år. Det oplyses, at prisen for varen er 213 kr. i 2015.

Indfør passende variable, og opstil en model, der beskriver udviklingen i prisen for varen efter år 2015.

Opgave 3

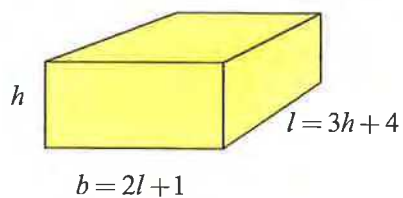


På figuren ses en parabel med ligningen

$$y = ax^2 + bx + c.$$

Benyt grafen til at begrunde fortegnene for a , b og c samt fortegnet for diskriminanten d .

Opgave 4



En kasse har højde h , bredde b og længde l . Sammenhængen mellem højden og længden er bestemt ved $l = 3h + 4$, og sammenhængen mellem længden og bredden bestemt ved $b = 2l + 1$.

Gør rede for, at kassens rumfang er givet ved

$$V = (3h + 4)(6h + 9)h.$$

Opgave 5

Undersøg, om $f(x) = x \cdot e^x$ er en løsning til differentialligningen

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y + x \cdot y}{x}.$$

Opgave 6

Bestem integralet

$$\int_0^2 \frac{3x^2 + 2}{\sqrt{x^3 + 2x + 4}} dx.$$

Besvarelsen afleveres kl. 10.00

Delprøven med hjælpemidler

Kl. 09.00 – 14.00

Opgave 7 To vektorer i planen er givet ved

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix} \quad \text{og} \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} t \\ 3 \end{pmatrix}.$$

- a) Bestem tallet t , så $\vec{a}$ og $\vec{b}$ er ortogonale.
- b) Bestem de to værdier af t , så vinklen mellem $\vec{a}$ og $\vec{b}$ er 45° .

Opgave 8 I perioden 2007-2013 har man optalt hvor mange danske familier, der har to personbiler. Tallene fremgår af nedenstående tabel

Årstal	2007	2009	2011	2013
Antal danske familier med to personbiler	244.643	263.039	281.634	298.329

I en model antages det, at udviklingen i antallet af danske familier med to personbiler kan beskrives ved en funktion af typen

$$f(t) = a \cdot t + b,$$

hvor $f(t)$ betegner antallet af danske familier med to personbiler til tidspunktet t (målt i antal år efter 2007).

- a) Benyt tabellens data til at bestemme tallene a og b .
- b) Beskriv betydningen af a , og benyt modellen til at bestemme antallet af danske familier med to personbiler i 2020.

Opgave 9 I trekant ABC er $\angle A = 62^\circ$, $c = 5$ og $b = 7$.

- a) Bestem a , og bestem $\angle C$.

Punktet D ligger på siden BC , således at arealet af trekant ABD og arealet af trekant ADC er lige store.

- b) Bestem arealet af hver af de to trekanter, og bestem $|AD|$.

Opgave 10 En cirkel har ligningen $(x-3)^2 + (y-5)^2 = 25$, og en linje m har ligningen $y = \frac{4}{3}x$.

a) Gør rede for, at førsteaksen er tangent til cirklen.

Cirklen har to tangenter, der er parallelle med linjen m .

b) Bestem koordinatsættet til hvert af de to røringpunkter for tangenterne.

Opgave 11 I en model for glukosekoncentrationen i blodet for en person med diabetes gælder det, at

$$G(t) = 96 + 263 \cdot e^{-0,63t} \cdot \cos(1,03 \cdot t - 1,57), \quad 0 \leq t \leq 6,$$

hvor $G(t)$ er glukosekoncentrationen i blodet (målt i mg/dl) til tidspunktet t (målt i timer, der er gået siden indtagelsen af glukosen).

a) Tegn en skitse af grafen for G , og benyt modellen til at bestemme glukosekoncentrationen i blodet efter 2 timer.

b) Benyt modellen til at bestemme den største og mindste glukosekoncentration i blodet.

c) Benyt modellen til at bestemme det tidsinterval, hvori glukosekoncentrationen i blodet er aftagende.

Kilde: *Modeling Diabetes, Fall 2010, Math 636, <http://www-rohan.sdsu.edu/~jmahaffy/>*

Opgave 12 For at afsløre om der er foregået fusk ved et valg, kan man udnytte, at første ciffer i partiernes stemmetal fra alle valgstederne fordeler sig som vist i tabellen nedenfor, hvis det er gået retfærdigt til.

Første ciffer	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Sandsynlighed i procent	30,1	17,6	12,5	9,7	7,9	6,7	5,8	5,1	4,6

I en stikprøve fra et bestemt valg fordelte første ciffer i partiernes stemmetal fra 4430 tilfældigt udtrukne valgsteder sig som vist i tabellen nedenfor.

Første ciffer	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Antal	1261	784	577	454	359	350	223	232	190

a) Opstil en nulhypotese, og beregn de forventede værdier med udgangspunkt i nulhypotesen.

b) Afgør, om nulhypotesen kan forkastes på et 5% signifikansniveau.

Opgave 13 I et koordinatsystem i rummet er givet punkterne $A(10,0,0)$, $B(0,30,0)$ og $C(0,0,20)$. I en model er et trekantet sejl udsendt mellem de tre punkter A , B og C . Sejlet er en del af planen α , der indeholder A , B og C . Enheden på hver af akserne er meter.

a) Bestem en ligning for α , og bestem arealet af sejlet.

Et projektil affyres og følger den rette linje l , der går gennem punkterne $D(6,-2,9)$ og $E(7,-7,10)$.

b) Bestem en parameterfremstilling for l , og bestem koordinatsættet til det skudhul, projektilet laver i sejlet.

Opgave 14 Til et kar med vand tilføres hver time 4 L saltvand med en saltkoncentration på 0,3 kg/L. Samtidig tappes der 6 L væske pr. time fra karret. I en model er saltmængden i karret S (målt i kg) som funktion af tiden t (målt i timer) en løsning til differentialligningen

$$\frac{dS}{dt} = 1,2 - \frac{6 \cdot S}{100 - 2t}, \quad 0 \leq t < 50.$$

Karret indeholder ingen salt til tidspunktet $t = 0$.

a) Bestem en forskrift for $S(t)$.

b) Bestem det tidspunkt, hvor der er mest salt i karret.

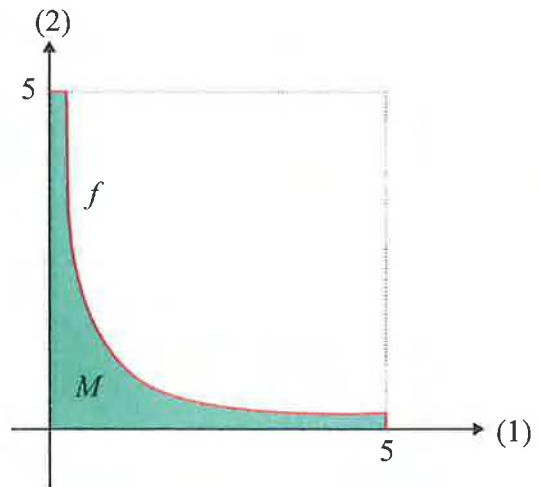
Opgave 15 En funktion f er givet ved

$$f(x) = \frac{1}{x}.$$

Et kvadrat med siden 5 er indlagt i et koordinatsystem (se figur). Kvadratet deles i to punktmængder af grafen for f . Den skraverede punktmængde kaldes M (se figur).

a) Bestem arealet af punktmængden M .

b) Bestem rumfanget af det omdrejningslegeme, der fremkommer, når M drejes 360° om førsteaksen.





**UNDERVISNINGS
MINISTERIET**
STYRELSEN FOR
UNDERVISNING OG KVALITET

Matematik B

Studentereksamen

Torsdag den 13. august 2015
kl. 9.00 - 13.00

Opgavesættet er delt i to dele.

Delprøven uden hjælpemidler består af opgave 1-6 med i alt 6 spørgsmål.
Delprøven med hjælpemidler består af opgave 7-14 med i alt 14 spørgsmål.

De 20 spørgsmål indgår med lige vægt i bedømmelsen.

Bedømmelsen af det skriftlige eksamenssæt

I bedømmelsen af besvarelsen af de enkelte spørgsmål og i helhedsindtrykket vil der blive lagt vægt på, om eksaminandens tankegang fremgår klart af besvarelsen. Dette vurderes blandt andet ud fra kravene beskrevet i de følgende fem kategorier:

1. TEKST

Besvarelsen skal indeholde en forbindende tekst fra start til slut, der giver en klar præsentation af, hvad den enkelte opgave og de enkelte delspørgsmål går ud på.

2. NOTATION OG LAYOUT

Der kræves en hensigtsmæssig opstilling af besvarelsen i overensstemmelse med god matematisk skik, herunder en redegørelse for den matematiske notation, der indføres og anvendes, og som ikke kan henføres til standardviden.

3. REDEGØRELSE OG DOKUMENTATION

Besvarelsen skal indeholde en redegørelse for den anvendte fremgangsmåde og dokumentation i form af et passende antal mellemregninger og/eller en matematisk forklaring på brugen af de forskellige faciliteter, som et værktøjsprogram tilbyder.

4. FIGURER

I besvarelsen skal der indgå en hensigtsmæssig brug af figurer og illustrationer, og der skal være en tydelig sammenhæng mellem tekst og figurer.

5. KONKLUSION

Besvarelsen skal indeholde en afrunding af de forskellige spørgsmål med præcise konklusioner, præsenteret i et klart sprog og/eller med brug af almindelig matematisk notation.

Delprøven uden hjælpemidler

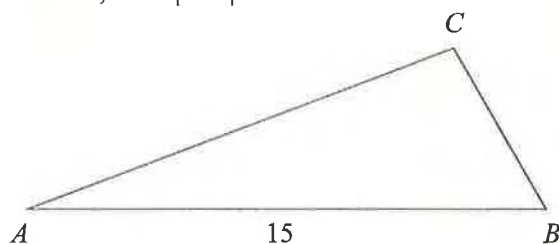
Kl. 09.00 – 10.00

Opgave 1 Bestem en ligning for den rette linje, der går gennem punkterne $P(4,2)$ og $Q(-3,9)$.

Opgave 2 Reducér udtrykket

$$(x+4)^2 + (x-4)^2.$$

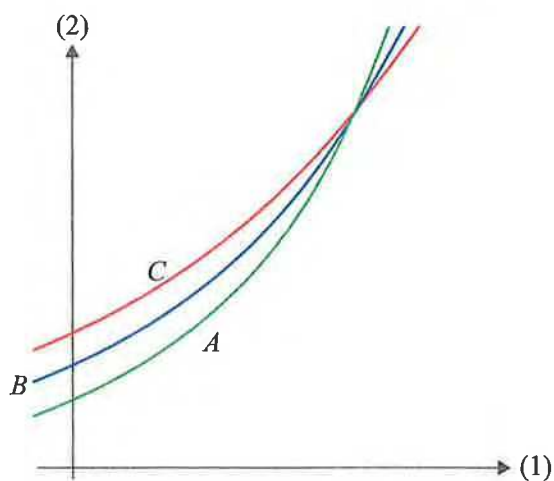
Opgave 3 Figuren viser en trekant ABC , hvor $|AB| = 15$.



En anden trekant DEF er ensvinklet med trekant ABC , hvor $\angle A = \angle D$ og $\angle B = \angle E$. Skalafaktoren mellem længderne af de ensliggende sider er 3.

Bestem de mulige længder af siden DE .

Opgave 4 På figuren ses graferne for tre funktioner af typen $f(x) = b \cdot a^x$.



Argumenter for, hvilken af de tre grafer, der svarer til funktionen med den største værdi af a , og hvilken der svarer til funktionen med den største værdi af b .

Opgave 5 En funktion f er givet ved

$$f(x) = x^3 + 5x ,$$

Bestem $f'(x)$, og skitsér grafen for f' .

Opgave 6 Bestem integralet

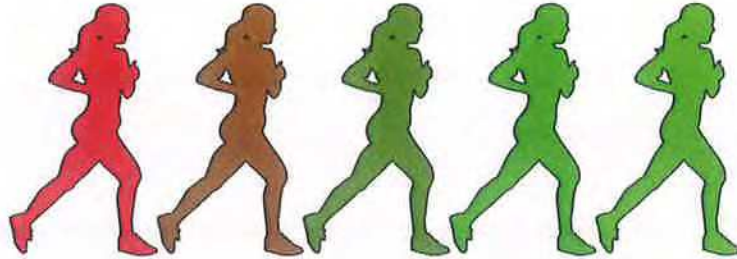
$$\int_0^2 (6x^2 - 4x + 1) \, dx.$$

Besvarelsen afleveres kl. 10.00
--

Delpøven med hjælpemidler

Kl. 09.00 – 13.00

Opgave 7



En kvinde har gennem en periode i forbindelse med sine løbeture noteret sammenhørende værdier af den gennemsnitlige løbetid pr. km og sin vægt umiddelbart før løbeturen. Resultaterne fremgår af tabellen nedenfor.

Vægt (kg)	83,0	81,5	79,1	78,2	76,0	75,5
Gennemsnitlig løbetid pr. km (minutter)	6,48	6,42	6,28	6,22	6,20	6,15

I en model kan sammenhængen beskrives ved

$$y = a \cdot x + b,$$

hvor x er vægten (målt i kg), og y er den gennemsnitlige løbetid pr. km (målt i minutter).

- Benyt tabellens data til at bestemme tallene a og b .
- Forklar betydningen af a , og benyt modellen til at bestemme kvindens gennemsnitlige løbetid pr. km, hvis hun vejer 74 kg umiddelbart før løbet.
- Benyt modellen til at bestemme den vægt, kvinden skal have umiddelbart før løbet for at kunne forvente en gennemsnitlig løbetid pr. km på 6,00 minutter.

Kilde: <http://www.runningforfitness.org>

Opgave 8

En funktion f er bestemt ved

$$f(x) = x^4 + 5x^3 - 15x^2 - 5x + 14.$$

- Løs ligningen $f(x) = 0$.
- Bestem en ligning for tangenten til grafen for f i punktet $P(1, f(1))$.

- Opgave 9** Antallet af bæltefikseringer på psykiatriske afdelinger i 2013 er opgjort efter varigheden af bæltefikseringen. I skemaet nedenfor ses en opgørelse over de 3237 bæltefikseringer, der varede under 12 timer.

Varighed (i timer)	0 – 2	2 – 4	4 – 6	6 – 8	8 – 10	10 – 12
Antal bæltefikseringer	889	722	531	358	341	396

- a) Bestem de kumulerede frekvenser, og tegn sumkurven.

Kilde www.ssi.dk

- Opgave 10** I et geografisk område A har den gennemsnitlige kvadratmeterpris for en bestemt type bolig udviklet sig efter modellen

$$f(x) = 12350 \cdot 0,96^x,$$

hvor x betegner tiden målt i år efter 2007, og $f(x)$ betegner den gennemsnitlige kvadratmeterpris (målt i kr).

- a) Benyt modellen til at bestemme den gennemsnitlige kvadratmeterpris i 2012, og til at bestemme den årlige procentvise ændring i den gennemsnitlige kvadratmeterpris.
- b) Benyt modellen til at bestemme den tid, der går, før den gennemsnitlige kvadratmeterpris er på 9000 kr.

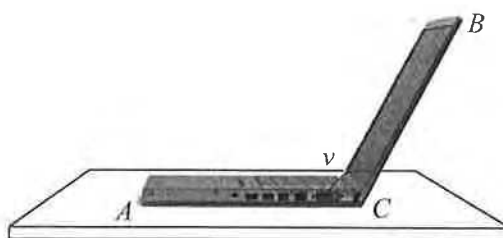
I et andet geografisk område B har den gennemsnitlige kvadratmeterpris for samme type bolig udviklet sig efter modellen

$$g(x) = 14251 \cdot 0,95^x,$$

hvor x betegner tiden målt i år efter 2007, og $g(x)$ betegner den gennemsnitlige kvadratmeterpris i område B (målt i kr).

- c) Benyt de to modeller til at bestemme det tidspunkt, hvor den gennemsnitlige kvadratmeterpris for denne type bolig i de to områder er den samme.

- Opgave 11**



På figuren ses en model af en bærbar computer set fra siden på et bord. Dybden $|AC|$ af computeren er 22 cm, desuden gælder at $|AC| = |CB|$, og skærmens øverste top B er 17,2 cm over bordet.

- a) Bestem den vinkel v , hvormed skærmen på computeren er vippet.

Opgave 12 En funktion f er bestemt ved

$$f(x) = -x^2 + 3,5 \cdot x + \sqrt{x}, \quad x \geq 0.$$

Grafen for f afgrænser i første kvadrant sammen med førsteaksen en punktmængde M , der har et areal.

- a) Tegn grafen for f , og bestem arealet af M .

Opgave 13



Grafik : colourbox.dk

En bilforhandler har på tilfældig måde udvalgt en stikprøve blandt sine kunder og spurgt dem, om farven har haft betydning for deres valg af bil. Svarene fra stikprøven fremgår af nedenstående tabel.

Køn\betydning	Ja	Nej
Kvinde	45	40
Mand	34	65

- a) Benyt et statistisk test med et signifikansniveau på 5% til at undersøge, om kundernes holdning til bilfarvens betydning afhænger af køn.

VEND!

Opgave 14



I en model kan tømning af en vandbeholder med en langsomt åbnende hane beskrives ved

$$V(t) = (10 - 0,1 \cdot t^2)^3, \quad 0 \leq t \leq 10,$$

hvor $V(t)$ er mængden af vand (målt i L) til tidspunktet t (målt i minutter efter starttidspunktet).

- a) Bestem mængden af vand i beholderen efter 5 minutter, og bestem det tidspunkt, hvor der er 4 L vand tilbage i beholderen.
- b) Bestem $V'(t)$, og bestem det tidspunkt, hvor der løber mest vand ud af beholderen pr. minut.